

Exercice 4)

On pose : $f: x \mapsto \frac{1}{x \ln(x)}$

f est $\mathcal{C}_{p,m}^0([2; +\infty[)$, positive et décroissante :

Alors $\forall n \geq 2$ ✓

$$f(2) + \int_3^{n+1} \frac{dx}{x \ln(x)} \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)} \leq \int_2^n \frac{dx}{x \ln(x)} + f(2) \quad \checkmark$$

$$\frac{1}{2 \ln(2)} + \int_3^{n+1} \frac{dx}{x \ln(x)} \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)} \leq \frac{1}{2 \ln(2)} + \int_2^n \frac{dx}{x \ln(x)} \quad \checkmark$$

$$\text{Or: } \int_3^{n+1} \frac{dx}{x \ln(x)} = \int_3^{n+1} \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)} = \left[\ln(\ln(x)) \right]_3^{n+1} \quad \checkmark$$

$$= \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(3)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

On a donc :

$$\underbrace{\frac{1}{2 \ln(2)} + \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(3))}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty} \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)}$$

Donc : $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln(n)}$ diverge ✓

Notons : $A = \frac{1}{2 \ln(2)}$, $S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)}$

On a :

$$\frac{A + \ln(\ln(n+1))}{\ln(\ln(n))} \leq \frac{S_n}{\ln(\ln(n))} \leq \frac{A + \ln(\ln(n))}{\ln(\ln(n))}$$

$$\underbrace{\frac{\ln(\ln(n+1))}{\ln(\ln(n))}}_{\rightarrow 1} + \underbrace{\frac{A}{\ln(\ln(n))}}_{\rightarrow 0} \leq \underbrace{\frac{S_n}{\ln(\ln(n))}}_{\rightarrow 1} \leq 1 + \underbrace{\frac{A}{\ln(\ln(n))}}_{\rightarrow 0}$$

↑
(Admission et exercice).

Donc : $\sum \frac{1}{n \ln(n)} \sim \ln(\ln(n))$ ✓