RANDRIANASOLO Georges
Lebreton Ruben
PEDRE Olivier

TD 26 :

Ex 12) : Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$

$$u_n := \frac{P(n)}{Q(n)}$$

Nature de $\sum \frac{P(n)}{Q(n)}$?

On note $C_p = \mathrm{Cd}(P) \neq 0$

$C_q = \mathrm{Cd}(Q) \neq 0$

$p = \deg(P)$

$q = \deg(Q)$

Si $p<q$: $u_n = \frac{P(n)}{Q(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{C_p}{C_q} * \frac{1}{n^{q-p}}$

$\sum \frac{1}{n^{q-p}}$: série de Riemann cv si $q-p>1$

i.e. $q>p+1$

On a $q>p$ i.e. $q \geq p+1$

Si $q=p+1$: $\frac{1}{n^{q-p}} = \frac{1}{n^{p+1-p}} = \frac{1}{n}$.

$\sum \frac{1}{n}$ diverge donc $\sum u_n$ dv aussi.

Si $q>p+1$: $\sum \frac{1}{n^{q-p}}$ cv donc $\sum u_n$ cv aussi.

Si $q=p$: $u_n = \frac{P(n)}{Q(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{C_p}{C_q}$

Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{C_p}{C_q} \neq 0$.

Donc $\sum u_n$ dv grossièrement.

Si $q<p$: $u_n = \frac{P(n)}{Q(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{C_p}{C_q} n^{p-q}$ $p-q>0$

Donc $\lim_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$

Donc $\sum u_n$ dv grossièrement.