

Exo 5:

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$. Alors $\left| \int_a^b f(t) \cdot dt \right| = \int_a^b |f(t)| \cdot dt \iff f$ est de signe constant.

$\Leftarrow$ Si f est de signe constant,

Si $f \geq 0$: alors $|f| = f$

donc $\left| \int_a^b f(t) \cdot dt \right| = \int_a^b f(t) \cdot dt = \int_a^b |f(t)| \cdot dt \quad \checkmark$

Si $f \leq 0$: alors $|f| = -f$

donc $\left| \int_a^b f(t) \cdot dt \right| = \left| \int_a^b -|f(t)| \cdot dt \right| = \left| - \int_a^b |f(t)| \cdot dt \right| = \int_a^b |f(t)| \cdot dt \quad \checkmark$

$\Rightarrow$ On suppose que $\int_a^b f(t) \cdot dt \geq 0$

$\int_a^b f(t) \cdot dt = \int_a^b |f(t)| \cdot dt \stackrel{\text{donc}}{\Rightarrow} \int_a^b (|f(t)| - f(t)) \cdot dt = 0 \quad \checkmark$

Or $|f(t)| - f(t) \geq 0$ sur $[a, b]$

et $g: t \mapsto |f(t)| - f(t)$ est une fonction continue positive sur $[a, b]$ $\checkmark$

et $\int_a^b g = 0$

donc d'après le théorème de l'intégrale nulle: $|f(t)| - f(t) = 0$

donc $|f(t)| = f(t) \quad \forall t \in [a, b]$
donc $f(t) \geq 0 \quad \forall t \in [a, b].$

La fonction f est donc de signe constant (positive). $\checkmark$

• On suppose que $\int_a^b f(t) \cdot dt \leq 0$

$\left| \int_a^b f(t) \cdot dt \right| = - \int_a^b f(t) \cdot dt = \int_a^b |f(t)| \cdot dt \stackrel{\text{donc}}{\Rightarrow} \int_a^b (|f(t)| + f(t)) \cdot dt = 0$

Or $|f(t)| + f(t) \geq 0$

et $h: t \mapsto |f(t)| + f(t)$ est continue positive sur $[a, b]$

et $\int_a^b h = 0$

donc d'après le théorème de l'intégrale nulle: $|f(t)| + f(t) = 0$

donc $|f(t)| = -f(t)$
donc $f(t) \leq 0$

La fonction f est donc de signe constant (négative). $\checkmark$