

Ex 14

On cherche la limite en 0 de $\int_{2n}^{2n+1} \frac{\cos(t)}{t} dt$

$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) \leq 1$, par croissance de l'intégrale on a:
 $\forall x \in \mathbb{R}^+$:

$$\int_{2n}^{2n+1} \frac{\cos(t)}{t} dt \leq \int_{2n}^{2n+1} \frac{1}{t} dt = \ln(2)$$

On pose $\forall x \in \mathbb{R}, \xi_x = 1 - \min_{t \in [x, 2x]} (\cos(t))$

$\cos'(2\pi)$ car $\cos \downarrow$ sur $[0; \pi]$.

Donc $\forall x \in (-R^+)$,
$$\int_x^{2\pi} \frac{1 - E_n}{t} dt \leq \int_{2\pi}^{2\pi} \frac{\cos(t)}{t} dt$$

donc $\forall x \in (\mathbb{R})$,
$$(1 - E_n) \ln(2) \leq \int_{2\pi}^{2\pi} \frac{\cos(t)}{t} dt$$

or
$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \min_{t \in [0, 2\pi]} (\cos(t))) = 0$$

$\rightarrow = \cos(2\pi)$ car $\cos \downarrow$
sur $[x; 2\pi] \subset [0, \pi]$.

Ainsi en passant à la limite on a
$$\ln(2) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{2\pi}^{2\pi} \frac{\cos(t)}{t} dt$$

Ainsi par encadrement
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{2\pi}^{2\pi} \frac{\cos(t)}{t} dt = \ln(2). \quad \checkmark$$