

Geslin

Billy

Gradel-Piet

Morceau

Exercice 10:

$$\int_0^1 t dt = \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

on voit que $\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$

ici $b=1$, $a=0$ et $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \int_0^1 t dt &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n-1)}{2n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(1-\frac{1}{n})}{2n} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\frac{k}{n} = t$$

$$\int_0^2 e^t dt = \left[e^t \right]_0^2 = e^2 - 1$$

ici $a=0$, $b=2$ et $f: \mathbb{R} \mapsto e^t$

$$\int_0^2 e^t dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} \sum_{k=0}^n \exp\left(\frac{2k}{n}\right) \rightarrow e^2 - 1$$

$$\int_0^\pi \cos(t) dt = \left[\sin(t) \right]_0^\pi = 0$$

ici $a=0$, $b=\pi$ et $f: \mathbb{R} \mapsto \cos t$

$$\int_0^\pi \cos(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^n \cos\left(\frac{\pi k}{n}\right) \rightarrow 0$$

Le but était de retrouver l'expression exacte de $\int_a^b f(t) dt$ pour retrouver que $\int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(t) dt$

$$\int_0^1 f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{n} \times f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Exercice 11:

$$a) u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2} = \sum_{k=0}^n \left(\frac{n}{n^2 + k^2} \right) - \frac{1}{n}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 \left(1 + \frac{k^2}{n^2} \right)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k^2}{n^2}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n} \right)^2}$$

Phrase à faire

on a $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ $\int_0^1 \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} d\left(\frac{k}{n}\right) = [\arctan(x)]_0^1$
 $= \arctan(1) - \arctan(0)$
 $= \frac{\pi}{4}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2} \right) = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

$$b) u_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n + \frac{k^2}{n}}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{k}{n}}{1 + \frac{k^2}{n^2}} = \frac{\frac{k}{n}}{1 + \left(\frac{k}{n} \right)^2}$$

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} \rightarrow \lim u_n = \int_0^1 f(x) dx$$

et $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \left[\frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_0^1$
 $= \boxed{\frac{1}{2} \ln(2)} - \frac{1}{2} \ln(1)$
 $= \frac{1}{2} \ln(2)$

$$c) u_n = \frac{1}{n} \times \sum_{k=1}^n \sqrt[n]{2^k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 2^{\frac{k}{n}}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = f(x) = 2^x$ $\int_0^1 2^x dx = \int_0^1 e^{x \ln(2)} dx$

$$= \left[\frac{1}{\ln(2)} e^{x \ln(2)} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{\ln(2)} e^{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(2)}$$

$$= \frac{1}{\ln(2)} (2 - 1) = \boxed{\frac{1}{\ln(2)}}$$

$$d) C_n = \left(\frac{(2n)!}{n! n^n} \right)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \ln(\dots)}$$

$$\ln(C_n) = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{(2n)!}{n! n^n} \right)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \ln \left(\frac{n+k}{n} \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right)$$

$$f(x) = \ln(1+x)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(C_n) = \int_0^1 \ln(1+x) dx$$

$$v = \ln(1+x) \quad u = x$$

$$v' = \frac{1}{1+x}$$

$$u' = 1$$

$$= \left[x \ln(1+x) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx$$

$$\int_0^1 1 - \frac{1}{1+x} dx = x - \ln(1+x)$$

$$= \ln(2) - \left[x - \ln(1+x) \right]_0^1$$

$$= \ln(2) - 1 + \ln(2)$$

$$= 2 \ln(2) - 1$$

$$\ln(2^2)$$

done

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} C_n$$

$$e^{\ln(C_n) - 1} = e^{\ln(C_n)} \cdot e^{-1} = \frac{4}{e}$$

Exercice 121

$$\int_0^{2\pi} \ln|x - e^{it}| dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2\pi}{n} \sum_{k=1}^n \ln|x - e^{\frac{2ik\pi}{n}}| \quad /$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2\pi}{n} \ln\left(\prod_{k=1}^n |x - e^{\frac{2ik\pi}{n}}|\right) \quad /$$

et $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ est une racine de l'unité en faisant le produit $k=0 \rightarrow n$

$$\text{on a alors } \prod_{k=1}^n (x - e^{\frac{2ik\pi}{n}}) = (x^n - 1) \quad /$$

$$\text{donc } \int_0^{2\pi} \ln|x - e^{it}| dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2\pi}{n} \ln|x^n - 1| \quad /$$

$$\text{Cas } |x| < 1 \quad x^n \rightarrow 0 \quad \ln|x^n - 1| \rightarrow 0 \quad /$$

$$\text{si } |x| < 1$$

$$\int_0^{2\pi} \ln|x - e^{it}| dt \rightarrow 0 \quad /$$

$$\text{Cas } |x| > 1$$

$$|x^n| \rightarrow +\infty \quad |x^n - 1| = |x^n| \left(1 - \frac{1}{x^n}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2\pi}{n} \ln(|x^n| \cdot |1 - \frac{1}{x^n}|) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2\pi}{n} \ln|x^n| + \frac{2\pi}{n} \ln|1 - \frac{1}{x^n}| \rightarrow 0$$

donc

$$\text{si } |x| < 1$$

$$\int_0^{2\pi} \ln|x - e^{it}| dt \rightarrow 2\pi \ln|x| \quad /$$

Cas $|x| = 1$ i.e. $x = e^{i\theta} \rightarrow$ la fonction
 $t \mapsto |e^{i\theta} - e^{it}|$ s'annule sur $[0, 2\pi]$
 donc $\ln|x - e^{it}|$ n'est pas défini
 sur tout l'intervalle $[0, 2\pi]$.