

Exo 7:

On a $fg \geq 1$

On applique la racine :

$$\sqrt{fg} \geq \sqrt{1} = 1 \quad /$$

MPSI

02/06/26

MATHEO

DESFONTAINES

→ On applique l'intégrale, et par croissance de l'intégrale, l'ordre est conservé :

$$\int_0^1 \sqrt{fg(t)} \cdot dt \geq \int_0^1 1 \cdot dt \quad /$$

Et, au carré :

$$\left(\int_0^1 \sqrt{fg(t)} \cdot dt \right)^2 \geq \left(\int_0^1 1 \cdot dt \right)^2 = 1.$$

DOUROUGUY

BENNY

Or, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} \left(\int_0^1 \sqrt{fg} \cdot dt \right)^2 &\leq \underbrace{\int_0^1 \sqrt{f}^2 \cdot dt \times \int_0^1 \sqrt{g}^2 \cdot dt}_{= \int_0^1 f(t) dt \times \int_0^1 g(t) dt} \\ &= \int_0^1 f(t) dt \times \int_0^1 g(t) dt \quad / \end{aligned}$$

Donc :

$$\int_0^1 f(t) dt \times \int_0^1 g(t) dt \geq \underbrace{\left(\int_0^1 1 \cdot dt \right)}_{= 1}$$

Ainsi :

$$\boxed{\left(\int_0^1 f(t) \cdot dt \right) \left(\int_0^1 g(t) \cdot dt \right) \geq 1} \quad /$$