

Madiba
Lerah

TD: 25 Intégration sur un segment.

exo 10.

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(a_i) \quad \text{avec } a_i = a + i \frac{b-a}{n}$$

Pour $\int_0^1 t dt$ on a $a=0$ $b=1$ et $f(t)=t$

$$\int_0^1 t dt \stackrel{?}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n}$$

On veut retrouver
cette égalité

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{(n-1)(n-1+1)}{2} \right) \checkmark$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{n^2 - n}{2} \right) \checkmark$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n-1)}{2n^2} \checkmark$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-1}{2n} \checkmark$$

idem

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \left(1 - \frac{1}{n} \right)}{2n} = \frac{1}{2} \checkmark$$

$$\text{Pour } \int_0^2 e^t dt \stackrel{?}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2k}{n}} \checkmark$$
$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{2}{n}} \right)^k \checkmark$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} \left(\frac{e^2 - 1}{e^{\frac{2}{n}} - 1} \right) \checkmark$$

On a $e^u = 1 + u$ donc $e^{\frac{2}{n}} = 1 + \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

donc $e^{\frac{2}{n}} - 1 = \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} \frac{(e^2 - 1)}{\frac{2}{n} + o(1)} = e^2 - 1 \checkmark$$

Donc $\int_0^\pi \cos(t) dt$ $a=0$ $b=\pi$ $f(t) = \cos(t)$

$$\int_0^\pi \cos(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(0 + \frac{\pi k}{n}\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{Re}\left(e^{i\frac{\pi k}{n}}\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{Re}\left(e^{i\frac{\pi}{n}}\right)^k$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{n} \operatorname{Re}\left(\frac{e^{i\pi} - 1}{e^{i\frac{\pi}{n}} - 1}\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{n} \left(\frac{\cos(\pi) - 1}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) - 1} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-2\pi}{\left(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) - 1\right)n} = 0$$

entre -1 et 1

$\cos(k\pi) =$
 $\Delta \operatorname{Re}(e^{ik\pi})$
 $\neq \operatorname{Re}(e^{i0})^k$

Exo 13. $\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_0^1 x^2 \sqrt{1+ax^2} dx$?

$\forall x \in [0, 1]$ on a $1 \leq \sqrt{1+ax^2} \leq \sqrt{1+a}$ ✓

$$x^2 \leq x^2 \sqrt{1+ax^2} \leq x^2 \sqrt{1+a} \quad \checkmark$$

$$\int_0^1 x^2 dx \leq \int_0^1 x^2 \sqrt{1+ax^2} dx \leq \int_0^1 x^2 \sqrt{1+a} dx$$

$$\left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 \leq \int_0^1 x^2 \sqrt{1+ax^2} dx \leq \sqrt{1+a} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 \quad \checkmark$$

$$\frac{1}{3} \leq \int_0^1 x^2 \sqrt{1+ax^2} dx \leq \frac{\sqrt{1+a}}{3}$$

D'après le thm d'encadrement $\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_0^1 x^2 \sqrt{1+ax^2} dx = \frac{1}{3}$ ✓

$\xrightarrow{a \rightarrow 0^+} \frac{2}{3}$

T.B.

Exercice 8.

b) $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx$

$\forall x \in [0, 1]$ on a $1 \leq \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2}$ ✓

passage à l'inverse

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq 1$$

$$\frac{x^n}{\sqrt{2}} \leq \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leq x^n$$

$$\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{2}} dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx \leq \int_0^1 x^n dx$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 \leq u_n \leq \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1$$

$$\frac{1}{\sqrt{2} (n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

D'après le théorème d'encadrement $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$. ✓

e) $u_n = \int_0^\pi \frac{n \sin x}{n+x} dx$

$$\frac{n+\pi}{n}$$

$\forall x \in [0, \pi]$ on a $1 \leq \frac{1+x}{n} \leq 1 + \frac{\pi}{n}$

Car $\sin x \geq 0$
sur $[0, \pi]$.

$$\frac{n}{n+\pi} \leq \frac{n}{n+x} \leq 1$$

$$\frac{\sin(x) n}{n+\pi} \leq \frac{\sin(x) n}{n+x} \leq \sin(x)$$

$$\int_0^\pi \frac{\sin x n}{n+\pi} dx \leq \int_0^\pi \frac{\sin(x) n}{n+x} dx \leq \int_0^\pi \sin x dx$$

$$\left(\frac{n}{n+\pi} \right) \int_0^\pi \sin x \leq u_n \leq \int_0^\pi \sin x dx$$

→ 1

$$\frac{n}{n+\pi} [-\cos(x)]_0^\pi \leq u_n \leq [-\cos(x)]_0^\pi$$

$$\frac{2n}{n+\pi} \leq u_n \leq 2$$

$$\frac{2n}{n \left(1 + \frac{\pi}{n}\right)} \leq u_n \leq 2$$

$$\frac{2}{1 + \frac{\pi}{n}} \leq u_n \leq 2$$

Par théorème des gendarmes $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$