

Beurier
Loukar

TD 25

Ex 10

Exprimer l'aire des intégrales comme limite d'une somme de Riemann

Fondrot
Johan.

$$\int_0^1 t dt$$

$$f: \begin{cases} [0; 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x \end{cases}$$

f est continue sur le segment $[0, 1]$

On considère la subdivision régulière de $[0, 1]$: $(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n})$

et on choisit la famille $(\frac{i}{n})_{i \in [0, n-1]}$ (méthode des rectangles à gauche)

$$S_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{(n-1)n}{2n^2} = \frac{(n-1)}{2n}$$

On retrouve ce résultat dans ce cas.

On sait que $(S_n(f))$ converge vers $\int_0^1 f$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Vérification: $\int_0^1 t dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$

$$\int_0^2 x e^x dx$$

$$f: \begin{cases} [0; 2] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x e^x \end{cases}$$

f est continue sur le segment.

On considère la subdivision régulière de $[0; 2]$: $(0, \frac{2}{n}, \frac{4}{n}, \dots, \frac{2n}{n})$

On choisit la famille $(\frac{2i}{n})_{i \in [0, n-1]}$ (méthode des rectangles à gauche).

$$\begin{aligned} S_n(f) &= \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} e^{\frac{2i}{n}} = \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(e^{\frac{2}{n}}\right)^i \quad (\text{Formule d'une somme de suite géométrique}) \\ &= \frac{2}{n} \left(\frac{e^2 - 1}{e^{\frac{2}{n}} - 1} \right) \end{aligned}$$

On sait que le DL en 0 de $e^{\frac{2}{n}}$ vaut: $e^{\frac{2}{n}} = 1 + \frac{2}{n} + o_{n \rightarrow \infty}\left(\frac{1}{n}\right)$

On a donc $S_n(f) = \frac{2}{n} \left(\frac{e^2 - 1}{\frac{2}{n} + o_{n \rightarrow \infty}\left(\frac{1}{n}\right)} \right)$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} \left(\frac{e^2 - 1}{\frac{2}{n} + o_{n \rightarrow \infty}\left(\frac{1}{n}\right)} \right) = \frac{2}{1} \left(\frac{e^2 - 1}{2} \right) = \frac{e^2 - 1}{1}$$

Vérification: $\int_0^2 x e^x dx = \left[e^x \right]_0^2 = e^2 - e^0 = e^2 - 1$

$$\int_0^\pi \cos(t) dt$$

$$f: \begin{cases} [0; \pi] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \cos(x) \end{cases} \text{ continue.}$$

La subdivision régulière de $[0, \pi]$ est choisie
est: $(0, \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \dots, \frac{n\pi}{n})$

on choisit une famille de points $(a_k)_{k \in [0, n-1]}$ /

$$\forall k \in [0, n-1], a_k = \frac{k\pi}{n} \quad /$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$S_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \times \frac{\pi}{n} \quad /$$

$$= \frac{\pi}{n} \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{i\pi}{n}} \right)^k \right) = \frac{\pi}{n} \operatorname{Re} \left(\frac{e^{i\pi} - 1}{e^{\frac{i\pi}{n}} - 1} \right) \quad /$$

$$= \frac{\pi}{n} \operatorname{Re} \left(\frac{-2}{e^{i\pi/2n} (e^{i\pi/2n} - e^{-i\pi/2n})} \right) \quad /$$

$$= \frac{\pi}{n} \operatorname{Re} \left(\frac{-2}{e^{i\pi/2n} \times 2i \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \right) \quad /$$

$$= \frac{\pi}{n} \operatorname{Re} \left(\frac{i e^{-i\pi/2n}}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \right) = \frac{\pi}{n} \operatorname{Re} \left(\frac{-\sin\left(\frac{-\pi}{2n}\right) + i \cos\left(\frac{-\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \right) \quad /$$

$$= \frac{\pi}{n} \times 1 \quad /$$

On ~~sait~~ ^{retrouve} que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f) = \int_0^{\pi} \cos(t) dt$

$$\text{donc } \int_0^{\pi} \cos(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{n} = 0 \quad /$$

$$\text{Vérification } \int_0^{\pi} \cos(t) dt = \sin(\pi) - \sin(0) = 0 \quad /$$