

CLAIN Niquep
 ABDALLAH-COSTA Kevin
 FABIEN Maxime

Exercice 1:

1) $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}^+)^2, \sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}$

On a $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

$\Leftrightarrow a+b \leq a + 2\sqrt{ab} + b$

$\Leftrightarrow 0 \leq 2\sqrt{ab}$

$\Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{ab}$

car les qtes sont ≥ 0 .

Donc, on a bien $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}^+)^2, \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ ✓

2) Montrons que $f: x \mapsto \sqrt{x}$ est u.c

On applique l'inégalité de la question 1 avec le couple $(x-y, y)$, avec $x \geq y$.

On a donc $\sqrt{x-y} + \sqrt{y} \geq \sqrt{x-y+y}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-y} + \sqrt{y} \geq \sqrt{x}$ ✓

$\Leftrightarrow \sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{x-y}$

$\Leftrightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{x-y} \leq \sqrt{|x-y|}$

$\Leftrightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x-y|}$

Quelle si
 intervenir
 x et y si
 ce n'est
 pas le cas.

Ainsi, on définit un certain $\eta > 0$, tel que:

$|x-y| \leq \eta$

donc, comme f est croissante, on a:

$$\sqrt{|x-y|} \leq \sqrt{\eta} \quad /$$

On pose alors $\eta = \varepsilon^2$
donc $\sqrt{|x-y|} \leq \varepsilon \quad /$

Finalement, on a bien: $\exists \eta > 0 \quad / \quad \forall (x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2,$
 $|x-y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \quad /$

• Pq $f: x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas lipschitzienne.

Par l'absurde, supposons qu'elle soit k -lipschitzienne,
alors $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2$, on a:

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq k|x-y|$$

Ceci étant valable $\forall y \in \mathbb{R}^+$, cela est valable pour $y=0$.
 ~~$\sqrt{x} \leq kx$~~

On a alors:

$$|\sqrt{x}| \leq k|x|$$

Or $x \in \mathbb{R}^+$, donc on a:

$$\frac{\sqrt{x}}{x} \leq k \quad \text{donc} \quad \frac{1}{\sqrt{x}} \leq k \quad /$$

Or $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$. Ce qui est absurde. /

Exercice 5:

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$,

$$\eta_f \left(\left| \int_a^b f(t) dt \right| \right) = \left(\int_a^b |f(t)| dt \right) \Leftrightarrow f \text{ est de signe constant}$$

$\Rightarrow$ Supposons que f soit de signe constant, on veut que:

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$$

• Si $f \geq 0$ sur $[a, b]$, alors $|f| = f$ ✓

$$\begin{aligned} \text{donc } \int_a^b |f(t)| dt &= \int_a^b f(t) dt \geq 0 \quad \checkmark \\ &= \left| \int_a^b f(t) dt \right| \quad \checkmark \end{aligned}$$

• Si $f \leq 0$ sur $[a, b]$, alors $|f| = -f$

$$\text{donc } \int_a^b |f(t)| dt = - \int_a^b f(t) dt \quad \text{or} \quad \int_a^b f(t) dt \leq 0$$

$$\text{donc } = \left| \int_a^b f(t) dt \right|$$

$\Rightarrow$ Supposons que $\left| \int_a^b f(t) dt \right| = \int_a^b |f(t)| dt$

On a deux cas:

1^{er} cas: $\int_a^b f \geq 0$

$$\text{Alors, } \int_a^b f = \int_a^b |f| \quad (\text{car } \left| \int_a^b f \right| = \int_a^b |f|)$$

Par linéarité: $\int_a^b |f| - f = 0$ ✓

On $f \leq |f|$, donc $|f| - f \geq 0$ et continue sur $[a, b]$.

Sachant que son intégrale est nulle, alors:

$$|f| - f = 0, \text{ donc } |f| = f$$

$$\text{donc } f \geq 0 \quad \checkmark$$

On traite le deuxième cas ($\int_a^b f \leq 0$) de manière similaire. On trouvera $f \leq 0$.

→ À détailler !