

Mathé PALANI

TD 24

Noé OUNE BIVE

Mathéo SALEM exercice 3

1) on calcule

$$S = \begin{pmatrix} I_m & 0_m \\ -I_m & I_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I_m & 0_m \\ -I_m & I_n \end{pmatrix} \times M$$

et cette multiplication ne changera

pas le rang de M car S est une matrice

Triangular diagonale
 par bloc,
 2 blocs diagonaux
 inversibles.

et I_m est bien inversible, donc S est inversible

$$\begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix} = M$$

$$S = \begin{pmatrix} I_m & 0_m \\ -I_m & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & A \\ 0_n & B-A \end{pmatrix} = SM$$

$$\text{donc } \text{rg}(SM) = \text{rg}(M)$$

$$= \text{rg}(A) + \text{rg}(B-A) \checkmark$$

2) pour que M soit inversible il faut que $\text{rg}(M) = 2n$

$$\text{i.e. } \text{rg}(A) + \text{rg}(B-A) = 2n$$

comme $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B-A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

$$\begin{cases} \text{rg}(A) \leq n \\ \text{rg}(B-A) \leq n \end{cases}$$

$$\text{donc } \text{rg}(A) = n \text{ et } \text{rg}(B-A) = n$$

i.e. A et $B-A$ sont inversibles

3) on admet que M^{-1} existe

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$$

$$\text{on sait que } MM^{-1} = \begin{pmatrix} I_m & 0_m \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A(X+Z) & A(Y+T) \\ AX+BZ & AY+BT \end{pmatrix}$$

il y
avait
plus
astucieux.

$$\begin{cases} A(X+Z) = I_m \\ A(X+T) = 0_m \\ AX + BZ = 0_m \\ AY + BT = I_m \end{cases}$$

comme $A \in GL_n(\mathbb{C})$
 $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X + Z = A^{-1} \\ Y + T = 0_m \\ AX + BZ = 0_m \\ AY + BT = I_m \end{cases}$$

$$Y = -T$$

donc

$$(B-A)T = I_m$$

$$\Leftrightarrow T = (B-A)^{-1}$$

$$X = -T = -(B-A)^{-1}$$

$$X = A^{-1} - Z$$

$$AX + BZ = A(A^{-1} - Z) + BZ = (B-A)Z + I_m = 0_m$$

$$\Leftrightarrow Z = -(B-A)^{-1}$$

$$\text{donc } X = A^{-1} + (B-A)^{-1}$$

donc

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + (B-A)^{-1} & -(B-A)^{-1} \\ -(B-A)^{-1} & (B-A)^{-1} \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

Il fallait utiliser l'idée suivante.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} A & A & I_n & 0_n \\ A & B & 0_n & I_n \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \left(\begin{array}{cc|cc} A & A & I_n & 0_n \\ 0 & B-A & -I_n & I_n \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\substack{L_1 \leftarrow A^{-1}L_1 \\ L_2 \leftarrow (B-A)^{-1}L_2}} \left(\begin{array}{cc|cc} I_n & I_n & A^{-1} & 0_n \\ 0 & I_n & -(B-A)^{-1} & (B-A)^{-1} \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \left(\begin{array}{cc|cc} I_n & 0_n & A^{-1} + (B-A)^{-1} & -(B-A)^{-1} \\ 0 & I_n & -(B-A)^{-1} & (B-A)^{-1} \end{array} \right)$$