



Ex 18 EDL 1

1. Résolvons sur $]0,1[$

$$(E) \quad xy' - y = 2x^2 \ln^2(x)$$

$$a. \quad y' - \frac{y}{x} = 2x \ln^2(x)$$

On détermine les solutions homogènes

$$y' - \frac{y}{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow y' = \frac{y}{x} \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \ln(y) = \ln(x) + \text{Constante.}$$

$$\Leftrightarrow y = A e^{\ln(x)} = Ax.$$

$$\text{d'où } y_{\text{H}}(x) = Ax$$

On détermine une solution particulière en utilisant la méthode de variation de constante

$$\forall x \in]0, 1[$$

$$y_p(x) = \lambda(x)x$$

$$y_p'(x) = \lambda'(x)x + \lambda(x)$$

Alors en injectant on a :

$$y_p'(x) - \frac{y_p(x)}{x} = 2x \ln^2(x)$$

$$\Leftrightarrow \lambda'(x)x + \lambda(x) - \lambda(x) = 2x \ln^2(x)$$

$$\Leftrightarrow \lambda'(x) = 2 \ln^2(x)$$

Alors $\lambda(x) = 2 \int \ln^2(t) dt = 2 \int \frac{\ln^2(t)}{t} dt$
 par intégration par partie on a

$$\begin{cases} u = \ln^2(t) \\ v' = \frac{1}{t} \end{cases} \Rightarrow \frac{u}{v} - \int u' v = \int \frac{2 \ln(t)}{t} dt$$

Un peu brouillon.

$$\lambda(x) = 2 \left(\left[\frac{1}{2} \ln^2(t) \right] - 2 \int \frac{\ln(t)}{t} dt \right)$$

$$= 2 \left(\left[x \ln^2(x) \right] - 2 \left[\ln(x)x \right] - 2 \int 1 \right)$$

$$y_p(x) = (2x \ln^2(x) - 4x \ln(x) - 4x)x$$

L'ensemble des solutions sur $]0, 1[$

$$\mathcal{S} = \left\{ y_H + y_p, y_H \in \mathcal{S}_H \right\} = \left\{ A x + 2x^2 (\ln^2(x) - 2 \ln(x) - 2x), A \in \mathbb{R} \right\}$$

Ex 18 EPL 12. Résolvons sur $] -1, 1[$

$$(E) : \sqrt{1-x^2} y' - y = 1$$

$$a. \quad y' - \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \checkmark$$

On détermine ~~la~~^{une} solution de l'équation homogène :

$$(EH) : y_H = B e^{\arcsin(x)} \quad \checkmark$$

On cherche une solution particulière en faisant varier la constante $\arcsin(x)$

$$y_p(x) = \mu(x) e^{\arcsin(x)}$$

$$y'_p(x) = \mu'(x) e^{\arcsin(x)} + \frac{\mu(x) e^{\arcsin(x)}}{\sqrt{1-x^2}}$$

Plus simplement: on pourrait chercher une solution constante: $\tilde{1}$ est solution.

On injecte dans l'équation.

$$(E) \quad \mu'(x) e^{\arcsin(x)} + \frac{\mu(x) e^{\arcsin(x)}}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\mu'(x) e^{\arcsin(x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Leftrightarrow \mu'(x) = \frac{1}{e^{\arcsin(x)}} \times \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

On remarque une expression de la forme

~~$\mu(x) e^{\mu(x)}$~~
 $-\mu'(x) e^{\mu(x)}$

Où $\mu(x) = -\arcsin(x)$

On pose $u = \arcsin(x)$ et on intègre par parties.

$$\mu(x) = \int \frac{e^{-u}}{\sqrt{1-x^2}}$$

On identifie ainsi que

$$\mu(x) = \int u' e^{-u}$$

$$\Leftrightarrow \mu(x) = -e^{-u} = -e^{-\arcsin(x)} \quad \checkmark$$

$$\Leftrightarrow y_p(x) = \mu(x) y_H$$

L'ensemble des solutions sur $]1, 1[$

$$\mathcal{I} = y_H + y_p = A e^{\arcsin(x)} + (-e^{-\arcsin(x)}) e^{\arcsin(x)}$$

$$= A e^{\arcsin(x)} - 1$$

$$= A e^{\arcsin(x)} - 1 \quad \checkmark$$

$$A \in \mathbb{R}$$