

Exercice 5:

1) ζ est définie lorsque $\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} < +\infty$ ce qui est valable lorsque $\alpha > 1$ ✓

2) Soit $f: \begin{cases} \mathbb{R}^{++} \rightarrow \mathbb{R}^{++} \\ x \mapsto \frac{1}{x^\alpha} \end{cases}$ on a f dérivable sur $\mathbb{R}^{++}$ et $\forall x \in \mathbb{R}^{++}$, $f'(x) = -\frac{\alpha}{x^{\alpha+1}} < 0$ ✓

Ainsi f est décroissante et on a $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $\forall k \in [2, n]$, $\forall x \in [k, k+1]$ on a:

$$k \leq x \leq k+1 \text{ donc } \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \frac{1}{x^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \quad \checkmark$$

En intégrant sur $[k, k+1]$ on a $\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x^\alpha} dx \leq \frac{1}{k^\alpha}$ ✓

Avec $k-1$ dans $\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x^\alpha} dx$ on a $\frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{x^\alpha} dx$ ✓

Ainsi $\int_k^{k+1} \frac{1}{x^\alpha} dx \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{x^\alpha} dx$ ✓ en sommant par $k \in [2, n]$ ✓

$$\text{Donc } \int_2^{n+1} \frac{1}{x^\alpha} dx \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_1^n \frac{1}{x^\alpha} dx$$

$$\text{Finalement } 1 + \int_2^{n+1} \frac{1}{x^\alpha} dx \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x^\alpha} dx \quad \checkmark$$

$$1 + \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_2^{n+1} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_1^n$$

$$1 + \frac{(n+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{2^{1-\alpha}}{1-\alpha} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \quad \checkmark$$

En passant à la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$ on a:

$$1 - \frac{2^{1-\alpha}}{1-\alpha} \leq \zeta(\alpha) \leq 1 - \frac{1}{1-\alpha} \quad \checkmark$$

$$\text{On a } (\alpha-1) + 2^{1-\alpha} \leq (\alpha-1)\zeta(\alpha) \leq (\alpha-1) + 1 \quad \checkmark$$

$$\text{De plus } \lim_{\alpha \rightarrow 1^+} (\alpha-1) + 2^{1-\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 1^+} (\alpha-1) + 1 = 1 \quad \checkmark$$

$$\text{Donc par encadrement } \lim_{\alpha \rightarrow 1^+} \frac{\zeta(\alpha)}{\frac{1}{\alpha-1}} = 1 \quad \checkmark \text{ i.e. } \zeta(\alpha) \sim_{\alpha \rightarrow 1^+} \frac{1}{\alpha-1} \quad \checkmark$$

3) En reprenant la comparaison série intégrale avec $m \in \mathbb{N}^* / m > n$ sur $[n+1, m]$ on a l'encadrement

$$\int_{n+1}^{m+1} \frac{1}{x^\alpha} dx \leq \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_n^m \frac{1}{x^\alpha} dx \quad \checkmark$$

$$\left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_{n+1}^{m+1} \leq \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k^\alpha} \leq \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_n^m$$

$$\frac{(m+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{(n+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{m^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

$$\text{En passant à la limite quand } m \text{ tend vers } +\infty \text{ on a: } -\frac{(n+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \leq R_n \leq -\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} \quad \checkmark$$

On a donc $R_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ ✓ car $-\frac{(n+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$

De plus $S_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \zeta(\alpha)$ ~~✓~~ donc $\boxed{u_n = \frac{R_n}{S_n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{n^{1-\alpha}}{(1-\alpha)\zeta(\alpha)}}$ ✓

Ainsi $\sum u_n$ est de m nature que $\sum -\frac{n^{1-\alpha}}{(1-\alpha)\zeta(\alpha)}$ de m nature que $\sum \frac{1}{n^{\alpha-1}}$ ✓ qui converge si $\alpha-1 > 1$ i.e. $\boxed{\alpha > 2}$ ✓

T.B