

Exercice 4

• $\sum \frac{1}{n \ln(n)}$

Soit $f(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$, f est défini sur $[2, +\infty[$ ✓

f est positive et décroissante ($f'(x) = \frac{-(\ln(x)+1)}{x^2(\ln(x))^2}$) ✓

on a $\int_2^n \frac{1}{x \ln(x)} dx$ → décroissante sur $[e; +\infty[$.
→ il manque des mots.

on pose $u = \ln(x)$ donc $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow du = \frac{1}{x} dx$

on a donc $\int_{\ln(2)}^{\ln(n)} \frac{1}{u} du = \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ ✓

donc $\int_2^n \frac{1}{x \ln(x)} dx$ diverge donc la série $\sum \frac{1}{n \ln(n)}$ diverge ✓

• un équivalent des sommes partielles.

$$f(2) = \frac{1}{2 \ln(2)} = \frac{1}{\ln(4)}$$

$$f(2) + \int_2^{n+1} \frac{1}{x \ln(x)} dx \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)} \leq f(2) + \int_2^n \frac{1}{x \ln(x)} dx$$

en posant $u = \ln(x)$

$$f(2) + \int_{\ln(2)}^{\ln(n+1)} \frac{1}{u} du \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)} \leq f(2) + \int_{\ln(2)}^{\ln(n)} \frac{1}{u} du$$

$$\frac{1}{\ln(4)} + \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)) \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)} \leq \frac{1}{\ln(4)} + \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2))$$

$$= \text{constante} + \ln(\ln(n \times (1 + \frac{1}{n})))$$

$$\approx \ln(n) + \ln(1 + \frac{1}{n})$$

$$\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (1) \text{ donc } = o(\ln(n)) \quad \checkmark$$

On a $\frac{1}{\ln(4)} + \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$

et $\frac{1}{\ln(4)} + \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$

Par théorème d'encadrement : $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(\ln(n)) \quad \checkmark$