

Exo 5

Ex 5 Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$. Montrer que : $\left| \int_a^b f(t) dt \right| = \int_a^b |f(t)| dt \iff f$ est de signe constant

$\Rightarrow$ • On suppose $\int_a^b f > 0$.

On définit $g := |f| - f$

$$\int_a^b g = \int_a^b |f| - \int_a^b f = \left| \int_a^b f \right| - \int_a^b f = 0 \quad \checkmark$$

~~Donc~~ Or $g \geq 0$ De +, $g \in \mathcal{C}^0$ et tant que somme de f^+ & f^-
car $g = |f| - f$

D'après thm intégrale nulle : $g = \tilde{0}$ ✓

Donc $|f| = f$ ✓ donc $\boxed{f \geq 0}$ ✓

• Si $\int_a^b f \leq 0$, on considère $\tilde{f} := -f$

Abrs $\int_a^b \tilde{f} \geq 0$. En utilisant le raisonnement précédent on trouve que $\tilde{f} \geq 0$. Donc $\boxed{f \leq 0}$ ✓

$\Leftarrow$ • Si $f \geq 0$: Abrs $f = |f|$ et $\int_a^b f \geq 0$

$$\text{donc } \int_a^b f = \int_a^b |f| = \left| \int_a^b f \right| \quad \checkmark$$

• Si $f \leq 0$: $|f| = -f$ ✓ et $\int_a^b -f \geq 0$ ✓

$$\text{Donc } \int_a^b |f| = \int_a^b -f = \left| \int_a^b f \right| \quad \checkmark$$

Ex 13

Ex 13 Déterminer la limite quand a tend vers 0^+ de $\int_0^1 x^2 \sqrt{1+ax^2} dx$

Calculons $\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_0^1 x^2 \sqrt{1+ax^2} dx$

$\forall x \in [0, 1]$ on a : $1 \leq 1+ax^2 \leq 1+a$ ✓

donc $\Rightarrow 1 \leq \sqrt{1+ax^2} \leq \sqrt{1+a}$ ✓ $x^2 \geq 0$

donc $\Rightarrow x^2 \leq x^2 \sqrt{1+ax^2} \leq x^2 \sqrt{1+a}$

donc $\Rightarrow \int_0^1 x^2 \leq \int_0^1 x^2 \sqrt{1+ax^2} \leq \int_0^1 x^2 \sqrt{1+a} dx$ ✓

donc $\Rightarrow \frac{1}{3} \leq \int_0^1 x^2 \sqrt{1+ax^2} \leq \frac{1}{3} \sqrt{1+a}$ ✓
 $\xrightarrow{a \rightarrow 0^+} \frac{1}{3}$

D'après thm des gendarmes :

$\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_0^1 x^2 \sqrt{1+ax^2} = \frac{1}{3}$

Bien