

Exercice 2:

1) Soit $f: \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}^2$ avec la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

On a $\vec{0} \in \ker(f) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases} \quad \text{avec } \vec{u} = (x, y, z) \text{ et } \vec{u} \in \mathbb{R}_2[x]$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2z \\ y = -3z \end{cases}$

Donc

$\ker(f) = \{ z(-2, -3, 1), z \in \mathbb{R} \} = \text{vect}((-2, -3, 1)) \quad \text{base } \{(-2, -3, 1)\}$

et

$\text{Im}(f) = \text{vect}((-1, -1), (2, 1)) \quad \text{dans la base } \{(-1, -1), (2, 1)\} \text{ canonique de } \mathbb{R}^2$

2) Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mg } \mathbb{R}^4 = \ker A \oplus \ker \text{Im}(A)$

Déterminons $\ker(A)$

$\vec{u} \in \ker(A) \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 2b - c - d = 0 \\ 2a + 2b - c - d = 0 \\ a + b + c - 2d = 0 \\ a + b - 2c + d = 0 \end{cases} \quad \text{avec } \vec{u} = (a, b, c, d)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 2b - c - d = 0 \\ 3c - 3d = 0 \\ -3c + 3d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = d - b \\ d = c \end{cases}$

$\Leftrightarrow \vec{u} = (d - b, b, c, c)$

Donc

$$\ker(A) = \{ c(1,0,1,1) + b(-1,1,0,0), (c,b) \in \mathbb{R}^2 \} = \text{vect}((1,0,1,1), (-1,1,0,0)) \quad \checkmark$$

$$\text{donc } \dim(\ker(A)) = 2 \quad \checkmark$$

On a $\text{Im}(A) = \langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$ avec

$$\text{vect}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \text{ avec } \vec{u} = (2, 2, 1, 1), \vec{v} = (-1, -1, 2, -2)$$

$$\text{et } \vec{w} = (-2, -1, -2, 2)$$

$$\text{or } \vec{u} + 3\vec{v} = \vec{w} \text{ avec } \vec{u} \text{ non proportionnel à } \vec{v}$$

$$\text{donc } \text{Im}(A) = \text{vect}(\vec{u}, \vec{v}) \quad \checkmark$$

$$\text{donc } \dim(A) = \dim(\text{Im}(A)) = 2 \quad /$$

$$\text{D'après le thm du rang } \dim(E) = \dim(\text{Im}(A)) + \dim(\ker(A)) = 4$$

$$\text{donc } E = \mathbb{R}^4$$

→ Ce n'est pas prouvé,

il faut prouver que $\ker(A)$ et $\text{Im}(A)$ sont en somme directe (ce qui revient à prouver $\ker(A) \cap \text{Im}(A) = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$)
et on aura alors

$$\dim(\text{Im}(A) \oplus \ker(A)) = 2 + 2 = 4$$

$$\text{et donc } \text{Im}(A) \oplus \ker(A) = \mathbb{R}^4.$$