

Exercice 4: Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{R}$ soit X une v.a.r. à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$ /
 $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(X=k) = \frac{a}{k+1} \binom{n}{k}$

Déterminons a :

On sait que $\sum_{k=0}^n P(X=k) = 1 = \sum_{k=0}^n \frac{a}{k+1} \binom{n}{k}$ ✓

Comme a ne dépend pas de k on peut le sortir.

On multiplie par $n+1$ des deux côtés.

$$n+1 = a \sum_{k=0}^n \frac{n+1}{k+1} \binom{n}{k} = a \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1}$$
 ✓

On pose $i := k+1$ $n+1 = a \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n+1}{i}$ ✓

On rajoute le terme $i=0$ des deux côtés.

$$n+1+a = a \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i}$$
 ✓

D'après le binôme de Newton
 $n \in \mathbb{N}^*$

$$n+1+a = a (2^{n+1} - 1)$$

$$a = \frac{n+1}{2^{n+1} - 1}$$
 ✓

$$E(X) = \sum_{k=0}^n \frac{a(n+1)}{(2^{n+1}-1)(k+1)} X \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^{n+1}-1} a \binom{n+1}{k+1}$$
 ✓

$$= \frac{1}{2^{n+1}-1} \sum_{i=1}^{n+1} (i-1) \binom{n+1}{i} = \frac{1}{2^{n+1}-1} \left(\sum_{i=1}^{n+1} i \binom{n+1}{i} - \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n+1}{i} \right)$$
 ✓

Cherchons la valeur de $\sum_{i=1}^{n+1} i \binom{n+1}{i}$.

Etudions $f(x) = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} x^i = (x+1)^{n+1}$ ✓

$$f'(x) = \sum_{i=1}^{n+1} i \binom{n+1}{i} x^{i-1} = (x+1)^n \times (n+1)$$
 ✓

On évalue en $x=1$: $\sum_{k=1}^{n+1} k \binom{n+1}{k} = 2^n (n+1)$ ✓

Donc $E(X) = \frac{1}{2^{n+1}-1} (2^n (n+1) - (2^{n+1}-1)) = \frac{2^n (n+1)}{2^{n+1}-1} - 1$ ✓

On sait que $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ ✓

• $E(X^2) = \sum_{b=0}^n \frac{b^2}{b+1} \binom{n}{b} x_a = a \sum_{b=0}^n \left(b-1 + \frac{1}{b+1} \right) \binom{n}{b}$ ✓

$= a \sum_{b=0}^n b \binom{n}{b} - a \sum_{b=0}^n \binom{n}{b} + \sum_{b=0}^n \frac{a}{b+1} \binom{n}{b}$ ✓
 $= a(n 2^{n-1} - 2^n) + 1 = \frac{(n+1) 2^{n-1} (n-2)}{2^{n+1}-1} + 1$

En utilisant la formule avec $n-1$

$V(X) = 1 + \frac{(n+1)(n-2) 2^{n-1}}{2^{n+1}-1} - \left(\frac{2^n (n+1)}{2^{n+1}-1} - 1 \right)^2$

$= \frac{(n+1)(n-2) 2^{n-1}}{2^{n+1}-1} - \frac{2^{2n} (n+1)^2}{(2^{n+1}-1)^2} + \frac{2^{n+1} (n+1)}{2^{n+1}-1}$ ✓

~~$= \frac{(n+1) 2^{n-1}}{(2^{n+1}-1)}$~~

$= \frac{(n+1)}{2^{n+1}-1} \left(\overbrace{n 2^{n-1} - 2^n + 2^{n+1}}^{= 2^n} - \frac{(n+1) 2^{2n}}{(2^{n+1}-1)} \right)$ ✓

$= \frac{(n+1) 2^{n-1}}{(2^{n+1}-1)^2} \left((n+2)(2^{n+1}-1) - (n+1) 2^{n+1} \right)$ ✓
 $= 2^{n+2} - n - 2 - 2^{n+1}$
 $= 2^{n+1} - n - 2$ ✓

On a donc

$$V(X) = \frac{(n+1)2^{n-1}(2^{n+1}-n-2)}{(2^{n+1}-1)^2} \quad \checkmark$$