

TD 23: Variables aléatoires réelles

Exercice 10:

$X \perp Y$, donc

Probabilité que $X=Y$: On a $\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $P(X=i \cap Y=j) = P(X=i) \times P(Y=j)$.

$\left. \begin{array}{l} P(X=1) = \frac{1}{n} \text{ et } P(Y=1) = \frac{1}{n} \text{ alors } P(X=1 \cap Y=1) = \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \\ P(X=2) = \frac{1}{n} \text{ et } P(Y=2) = \frac{1}{n} \text{ alors } P(X=2 \cap Y=2) = \frac{1}{n^2} \\ \vdots \\ P(X=n) = \frac{1}{n} \text{ et } P(Y=n) = \frac{1}{n} \text{ alors } P(X=n \cap Y=n) = \frac{1}{n^2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} n \text{ possibilités} \end{array}$

Il y a n possibilités que $X=Y$, et elles ont chacune une probabilité de $\frac{1}{n^2}$.

Donc $P(X=Y) = n \times \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$

Probabilité que $X \geq Y$: $P\left(\bigcup_{i=1}^n (X,Y) = (i,i)\right) = \sum_{i=1}^n P(X,Y) = (i,i)$

Valeur de Y			
1	$X \geq Y \Leftrightarrow X \in \llbracket 1; n \rrbracket$	(n possibilités)	donc $P((Y=1) \cap (X \geq Y)) = \frac{1}{n} \times \frac{n}{n} = \frac{n}{n^2}$
2	$X \geq Y \Leftrightarrow X \in \llbracket 2; n \rrbracket$	($n-1$ possibilités)	donc $P((Y=2) \cap (X \geq Y)) = \frac{1}{n} \times \frac{n-1}{n} = \frac{n-1}{n^2}$
3	$X \geq Y \Leftrightarrow X \in \llbracket 3; n \rrbracket$	($n-2$ possibilités)	donc $P((Y=3) \cap (X \geq Y)) = \frac{1}{n} \times \frac{n-2}{n} = \frac{n-2}{n^2}$
$\vdots$			
n	$X \geq Y \Leftrightarrow X=n$	(1 possibilité)	donc $P((Y=n) \cap (X \geq Y)) = \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}$

Donc $P(X \geq Y) = \frac{n}{n^2} + \frac{n-1}{n^2} + \frac{n-2}{n^2} + \dots + \frac{1}{n^2} = \frac{1+2+3+\dots+n}{n^2}$
 $= \frac{1}{n^2} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n}$

Loi de probabilité de D:

On a $(X, Y) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ et $D = X - Y$

donc $D \in \llbracket 1-n; n-1 \rrbracket$ (et il existe n^2 couple (X, Y) différents)

On cherche, $\forall k \in \llbracket 1-n; n-1 \rrbracket$, la valeur de $P(D=k)$.

Cas où $k \geq 0$

On veut que $x - y = k$, i.e. $x = y + k$

et que: $1 \leq y \leq n$

et $1 \leq x \leq n$ donc $1 \leq y + k \leq n$ ✓

$$(1 \leq y \leq n) \text{ et } (1 \leq y + k \leq n) \Leftrightarrow 1 \leq y \leq n - k$$

Donc il existe $n - k$ couples (X, Y) différents tels que $D = k$. Et comme chaque couple a la même probabilité de $\frac{1}{n^2}$,
alors: $\forall k \in \llbracket \cancel{1-n}; n-1 \rrbracket$, $P(D=k) = \frac{n-k}{n^2}$

↗ Pour 0 aussi le résultat est juste.

Cas où $k < 0$:

Si on pose $k = -k$ et on utilise que $x - y = k \Leftrightarrow x - y = -k$
 $\Leftrightarrow y = x + k$

On obtient de la même manière qu'il existe $n - k$, donc $n + k$ couples (X, Y) tels que $D = k$. Et $\forall k \in \llbracket 1-n; 0 \rrbracket$, $P(D=k) = \frac{n+k}{n^2} = \frac{n-|k|}{n^2}$ ✓

Au final, dans les deux cas, on a, $\forall k \in \llbracket -(n-1); n-1 \rrbracket$,
 $P(D=k) = \frac{n-|k|}{n^2}$ ✓