

Exercice 4

Soit $m \in \mathbb{N}^*$, soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\llbracket 0, m \rrbracket$, tq: $\forall k \in \llbracket 0, m \rrbracket, P(X=k) = \frac{a}{k+1} \binom{m}{k}$

On sait que $\sum_{k=0}^m P(X=k) = 1$, Déterminons a :

On a

$$\sum_{k=0}^m \frac{a}{k+1} \binom{m}{k} = 1$$

Au lieu d'écrire
 tout
 calculer d'équivalence,
 b) q.t.c. simplement
 $\sum_{k=0}^m \frac{1}{k+1} \binom{m}{k}$

$$\Leftrightarrow a \sum_{k=0}^m \frac{1}{k+1} \binom{m}{k} = 1$$

$$\Leftrightarrow a \sum_{k=0}^m \frac{n!}{(k+1)k!(m-k)!} = 1$$

$$\Leftrightarrow a \sum_{k=0}^m \frac{1}{m+1} \frac{(m+1)!}{(k+1)!(m-k)!} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{m+1} \sum_{k=0}^m \binom{m+1}{k+1} = 1, \text{ on pose } j = k+1$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{m+1} \sum_{j=1}^{m+1} \binom{m+1}{j} = 1, \text{ on } \sum_{j=1}^{m+1} \binom{m+1}{j} = 2^{m+1} - 1$$

$$\Leftrightarrow a \frac{2^{m+1} - 1}{m+1} = 1$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{m+1}{2^{m+1} - 1} \quad \checkmark$$

Ainsi, $a = \frac{m+1}{2^{m+1} - 1} \quad \checkmark$

• Déterminons $E(X)$:

$$E(X) = \sum_{k=0}^m k \times \frac{a}{k+1} \binom{m}{k}, \text{ on } \frac{k}{k+1} = 1 - \frac{1}{k+1} \quad \checkmark$$

$$= a \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} - a \sum_{k=0}^m \frac{1}{k+1} \binom{m}{k} \quad \checkmark, \text{ avec } \sum_{k=0}^m \frac{1}{k+1} \binom{m}{k} = \frac{2^{m+1} - 1}{m+1} \quad \checkmark$$

$$= a 2^m - a \frac{2^{m+1} - 1}{m+1}, \text{ on } a = \frac{m+1}{2^{m+1} - 1}$$

$$= a \left(2^m - \frac{2^{m+1} - 1}{m+1} \right)$$

$$= a \left(\frac{2^m(m+1) - 2^{m+1} - 1}{m+1} \right)$$

$$\text{donc } E(X) = \frac{2^m(m+1)}{2^{m+1} - 1} - 1 \quad \checkmark$$

Déterminons $V(X)$:

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 \quad \checkmark$$

$$\bullet E(X^2) = a \sum_{k=0}^m \frac{k^2}{k+1} \binom{m}{k} = a \sum_{k=0}^m \left((k-1) + \frac{1}{k+1} \right) \binom{m}{k} \quad \checkmark$$

$$\text{donc } E(X^2) = a \left(\sum_{k=0}^m k \binom{m}{k} - \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} + \sum_{k=0}^m \frac{1}{k+1} \binom{m}{k} \right) \quad \checkmark$$

car $k^2 = (k+1)(k-1) + 1$

$$\bullet \sum_{k=0}^m k \binom{m}{k} = \sum_{k=0}^m k \frac{m!}{k!(m-k)!} = \sum_{k=1}^m m \frac{(m-1)!}{(k-1)!(m-k)!} = \sum_{k=1}^m m \binom{m-1}{k-1} \quad \checkmark$$

Oui, car le terme d'indice 0 est nul.

$$= m 2^{m-1}$$

$$\bullet \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} = 2^m \quad \checkmark$$

$$\bullet \sum_{k=0}^m \frac{1}{k+1} \binom{m}{k} = \frac{2^{m+1} - 1}{m+1} \quad \checkmark$$

$$\text{Ainsi, } E(X^2) = a \left(m 2^{m-1} - 2^m + \frac{2^{m+1} - 1}{m+1} \right)$$

$$\text{On a } a = \frac{m+1}{2^{m+1} - 1}$$

$$\text{donc } E(X^2) = \frac{(m+1)(m 2^{m-1} - 2^m)}{2^{m+1} - 1} + 1 \quad \checkmark$$

On en déduit que :

$$V(X) = \left(\frac{(m+1) 2^{m-1} (m-2)}{2^{m+1} - 1} + 1 \right) - \left(\frac{2^m(m+1)}{2^{m+1} - 1} - 1 \right)^2 \quad \checkmark$$