

TD 23

Exercice 1:

1) valeurs possible de X : 1, 2, 3 et 4

$$P(X=1) = \frac{1}{4} \quad \checkmark$$

$$P(X=2) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4} \quad \checkmark$$

Formule des probabilités composées

$$P(X=3) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad \checkmark$$

$$P(X=4) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad \checkmark$$

$$E(X) = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} + \frac{4}{4} = \frac{10}{4} = 2,5 \quad \checkmark$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{4}{4} + \frac{9}{4} + \frac{16}{4} - 2,5^2 = 7,5 - 2,5^2 = 1,25 \quad \checkmark$$

$$\sigma(X) = \sqrt{1,25} \quad \checkmark$$

2) $P(Y=K) = \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \times \frac{1}{4} \quad \forall k \in [1, n]$

$$P(Y=0) = \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$$E(Y) = P(Y=0) \times 0 + \sum_{k=1}^n P(Y=k) k = \sum_{k=1}^n k \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \times \frac{1}{4}$$

Exercice 2:

Seule possibilité: $[2|1]$

1. $\lambda_1 = 0 \quad \checkmark$

$\lambda_2 = 1$

$\lambda_3 = 2$

Possibilités

$[2|3|1]$ ou $[3|1|2]$

Pourrait être davantage expliqué

2. Cas où $n=4$:

$(1, 3, 4, 2)$ $(3, 2, 4, 1)$

$(1, 4, 2, 3)$ $(4, 2, 1, 3)$

$\Rightarrow$ A chaque fois que l'on se fixe un chiffre : il y a 2 possibilités

Donc le nombre d'ordre comportant une seule coïncidence vaut $2 \times 4 = 4 \lambda_3$

on ne refixe
pas 1 sinon on le
recompte
↓

Pareil mais avec
↓ 1 et 2

b. $(1, 2, 4, 3)$ $(4, 2, 3, 1)$ $(2, 1, 3, 4)$
 $(1, 4, 3, 2)$ $(3, 2, 1, 4)$
 $(1, 3, 2, 4)$

Le nombre d'ordres comportant exactement 2 coïncidences est 6.

c. On sait que :

- le nb d'ordres comportant exactement 3 coïncidences est 0 ✓
- le nb " " " 4 " " 1 ✓

Donc λ_4 : nb d'ordres comportant exactement 0 coïncidences.

$$\lambda_4 = 4! - 1 - 6 - 8 = 24 - 15 = 9$$

$$X_4(\omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\} \quad ✓$$

$$E(X_4) = 0 \times \frac{9}{24} + 1 \times \frac{8}{24} + 2 \times \frac{6}{24} + 3 \times 0 + 4 \times \frac{1}{24} = \frac{8+12+4}{24} = 1$$

3. On choisit les i positions qui coïncident parmi n
 donc $\binom{n}{i}$ choix

Pour les $n-i$ restants, ils ne doivent pas coïncider donc λ_{n-i} choix

On a bien $\binom{n}{i} \lambda_{n-i} \quad ✓$

4. Il y a exactement $n!$ ordres possibles tous équiprobables
 donc $\forall i \in [1, n]$

$$P(X_n = i) = \frac{1}{n!} \times (?) \lambda_{n-i}$$

$X_n = 1_{\{\text{coïncidence au 1er jeton}\}} + \dots + 1_{\{\text{coïncidence au } n\text{-ème jeton}\}}$
 On a alors

$$E(X_n) = \sum_{k=1}^n P\{\text{coïncidence au } k\text{-ème jeton}\}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} = 1 \quad ✓$$