

Très bien.

Exercice 10:

1) On calcule  $P(X=Y)$ .

On a  $P(X=Y) = P\left(\bigcup_{R=1}^n \{X=R\} \cap \{Y=R\}\right)$  ✓

$$= \sum_{R=1}^n P(X=R) \times P(Y=R) \quad \checkmark \quad \text{Car } X \perp Y \quad \checkmark$$

$$= \sum_{R=1}^n \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \quad \checkmark$$

2) On a

$$P(X \geq Y) = P\left(\bigcup_{R=1}^n \{X=R\} \cap \{Y \leq R\}\right) \quad \checkmark$$

$$= \sum_{R=1}^n \left( P(X=R) \cdot P\left(\bigcup_{i=1}^R \{Y=i\}\right) \right) \quad \checkmark$$

$$= \sum_{R=1}^n \left( \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^R P(Y=i) \right) \quad \checkmark$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{R=1}^n \sum_{i=1}^R \frac{1}{n} \quad \checkmark$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{R=1}^n \sum_{i=1}^R 1 \quad \checkmark$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{R=1}^n R \quad \checkmark$$

$$P(X \geq Y) = \frac{n+1}{2n} \quad \checkmark$$

3) on a :  $-1 \leq X \leq n$

et  $-n \leq -Y \leq -1$

donc  $1-n \leq D = X + Y \leq n-1$  ✓

on cherche  $\forall k \in \llbracket 1-n, n-1 \rrbracket, P(D=k)$

on s'intéresse aux cas  $k \geq 0$ :

$$P(D=k) = \sum_{i=1}^n P(X=i) \times P(Y=i-k)$$

car, comme  $Y \geq 1$ , si  $i \in \llbracket 1, k \rrbracket, i-k \leq 0$ , donc  $P(Y=i-k) = 0$

$$\text{aussi, } P(D=k) = \sum_{i=k+1}^n P(X=i) \cdot P(Y=i-k) \quad /$$

$$= \sum_{i=k+1}^n \frac{1}{n^2} = \frac{n-k}{n^2} \quad / = \frac{n-k}{n^2} \quad /$$

ou  $k \leq 0$ .

$$P(D=k) = \sum_{i=1}^n P(X=i) P(Y=i-k) \quad /$$

or, si  $i > k+n$ ,  $i-k > n$ , donc  $P(Y=i-k) = 0$

$$\text{aussi, } P(D=k) = \sum_{i=1}^{k+n} P(X=i) P(Y=i-k) = \sum_{i=1}^{k+n} \frac{1}{n^2} = \frac{k+n}{n^2}$$

$$= \frac{k+n}{n^2} = \frac{n-|k|}{n^2} \quad /$$

C'était  
correct!  
k était négatif  
 $i-k \geq i$ .

$$\text{on a donc } P(D=k) = P(D=-k) = \frac{n-|k|}{n^2} \quad /$$

On a bien  $\forall k \in \{-n, \dots, n-1\}$ ,  $|k| \leq n$  donc  $\frac{n-|k|}{n^2} \geq 0$  /

$$\text{et } \sum_{i=-n}^{n-1} P(D=i) = P(D=0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} P(D=i) \quad /$$

$$= P(X=Y) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{n-i}{n^2} \quad /$$

$$= \frac{1}{n} + \frac{2(n-1)}{n} - 2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{n^2} \quad /$$

$$= \frac{1}{n} + \frac{2(n-1)}{n} - \frac{2(n-1)n}{2n^2} \quad /$$

$$= \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} = 1 \quad /$$

donc  $\sum_{i=-n}^{n-1} P(D=i) = 1$  Ce qui prouve que la loi trouvée

est bien une loi de probabilité. /