

Exo 1:

1) X ne peut prendre que des valeurs entre 1 et 4

(calculons $P(X=k)$ pour $k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$:

$$P(X=1) = 1/4$$

$$P(X=2) = P(X \neq 1) \times P_{X \neq 1}(X=2) = 1/4$$

$$\uparrow \text{F.P.C.} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2}$$

$$P(X=3) = P(X \neq 1) \times P(X \neq 2) \times P_{X \neq 2}(X=3) \\ = 1/4 \leftarrow \text{Explication} = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$$

$$P(X=4) = P(X \neq 1) \times P(X \neq 2) \times P(X \neq 3) \\ \times P_{X \neq 3}(X=4) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \\ = 1/4$$

Avec : $P(X \neq 1) = 3/4$, $P(X \neq 2) = 2/3$,
 $P(X \neq 3) = 1/2$

On a donc le tableau suivant :

$X(\omega)$	1	2	3	4
$P(X=k)$	$1/4$	$1/4$	$1/4$	$1/4$

$$\text{Donc : } \boxed{E(X) = \frac{(1+2+3+4)}{4} = 5/2}$$

$$\text{Et : } \boxed{E(X)^2 = (5/2)^2 = 25/4}$$

$$\text{Et : } \boxed{E(X^2) = (1/4 \times 1^2) + (1/4 \times 2^2) \\ + (1/4 \times 3^2) + (1/4 \times 4^2) \\ = 15/2}$$

D'après la formule de Huygens :

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= 15/2 - 25/4 \\ &= \boxed{5/4} \text{ (i.e. : } 1,25) \checkmark\end{aligned}$$

2) Y ne peut prendre des valeurs qu'entre 0 et n

Regardons $P(X=k)$ pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$

$$P(Y=0) = (3/4)^n$$

↳ car il se peut que le rat ne trouve pas la bonne porte après n essais ✓

$$P(Y=1) = 1/4$$

$$P(Y=2) = (1/4) \times (3/4)$$

⋮

$$P(Y=n) = (1/4) \times (3/4)^{n-1} \checkmark$$

$$P(Y=n+1) = 0$$

On a donc le tableau suivant :

$Y(\Omega)$	0	1	...	n
$P(Y=k)$	$(3/4)^n$	$1/4$	...	$(1/4) \times (3/4)^{n-1}$ ✓

$$\text{Donc : } E(Y) = (1/4) \times \left(\sum_{k=0}^n k (3/4)^{k-1} \right) \checkmark$$

Astuce :

$$\text{On a : } S(x) = \sum_{k=0}^n x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

$$\text{Ainsi, } S'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} k x^{k-1} \text{ et donc } E(Y) = \frac{1}{4} S'(\frac{3}{4})$$

$$\text{Donc } S(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Calculons $S'(x)$:

$$\begin{aligned} S'(x) &= \frac{(1-x)(-(n+1)x^n) - (1-x^{n+1})(-1)}{(1-x)^2} \\ &= \frac{-(n+1)x^n(1-x) + (1-x^{n+1})}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

Remplacer

q par x .

On développe le numérateur :

$$\begin{aligned} & -(n+1)q^n + (n+1)q^{n+1} + 1 - q^{n+1} \\ &= 1 - (n+1)q^n + nq^{n+1} \end{aligned}$$

Donc :

$$S'(x) = \frac{1 - (n+1)q^n + nq^{n+1}}{(1-q)^2}$$

On a $p = 1/4$ et $q = 3/4$

Donc $p = 1 - q \Rightarrow p^2 = (1 - q)^2$

$$\text{Donc : } E(Y) = \frac{p}{p^2} [1 - (n+1)q^n + nq^{n+1}]$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } E(Y) &= \frac{1}{p} [1 - (n+1)q^n + nq^{n+1}] \\ &= \frac{1 - (n+1)q^n + nq^{n+1}}{p} \\ &= \frac{1 - (n+1)(3/4)^n + n(3/4)^{n+1}}{1/4} \end{aligned}$$