Noah
Corbi

~~ES~~ TD 23

Ex 1 :

1)

X	1	2	3	4
P	1/4	1/4	1/4	1/4

$\to X(\Omega) = \{1,2,3,4\}$

- $P(X=1) = \frac{1}{4}$

- $P(\{X\neq 1\} \cap \{X=2\}) = P(X\neq 1) \times P(X=2 \mid X\neq 1)$
$= \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$

- $P(\{X\neq 1\} \cap \{X\neq 2\} \cap \{X=3\}) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

- $P(\{X\neq 1\} \cap \{X\neq 2\} \cap \{X\neq 3\} \cap \{X=4\}) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{4}$

$\mathbb{E}(X) = \sum_{w\in\Omega} X(w) P(\{w\}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + 1 = \frac{5}{2}$

$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{w\in\Omega} X^2(w) P(\{w\}) = \frac{1}{4} + 1 + \frac{9}{4} + 4 = \frac{30}{4}$

Donc $V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{30}{4} - \frac{25}{4} = \frac{5}{4}$

Ainsi $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

2) On note Y le nombre d'essais du rat avec $Y \leq n$.
Alors $Y(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}$.

$P(Y=0)$

$= \mathbb{P}(\{Y \neq 1\} \cap \{Y \neq 2\} \cap \dots \cap \{Y \neq n\}) = \left(\frac{3}{4}\right)^n$

Pour $N \in [\![1;n]\!]$

$- P(\{Y \neq 1\} \cap \dots \cap \{Y = N\}) = \left(\frac{3}{4}\right)^{N-1} \times \frac{1}{4}$

Y	0	1	....	n
P	$(3/4)^n$	$(3/4)^0 \times \frac{1}{4}$		$(\frac{3}{4})^{n-1} \times \frac{1}{4}$

Ainsi $E(X) = \sum_{w \in \Omega} Y(w) P(\{w\})$

$= \sum_{N=0}^{n-1} \left(\frac{3}{4}\right)^N \times \frac{1}{4} \times k$

Plus simple avec la formule $\sum_{k=0}^{n} k P(Y=k)$

$= \cancel{\frac{1}{4} \times \frac{1-(3/4)^n}{1-3/4}}$

$= \cancel{1-(3/4)^n}$

NON.

Ex 6

Z	0	1	2	3	4	5
P	$6/36$	$10/36$	$8/36$	$6/36$	$4/36$	$2/36$

Il y a 6^2 soit 36 couple de chiffres possibles.
Donc $card(\Omega) = 36$.

- Pour $Z=0$, il y a 6 couples possibles, (N, N), $N \in [\![1,6]\!]$

Donc $P(Z=0) = \frac{6}{36} = 6$

- Pour $Z=1$, les couples possibles sont $(N+1, N)$, $N \in [\![1,5]\!]$

et $(N, N+1)$ soit 10 couples

Donc $\mathbb{P}(Z=1) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$

- $Z=2$, couples possibles $(N+2, N)$ et $(N, N+2)$, $N \in [\![1, 4]\!]$
8 possibilités

donc $P(Z=2) = \frac{8}{36} = \frac{4}{18}$.

On généralise, $\forall i \in [\![1, 5]\!]$:

$Z=i$, couples possibles, $(N+i, N)$ et $(N, N+i)$, $N \in [\![1, 6-i]\!]$

Donc $P(Z=i) = \frac{12-2i}{36}$

$-P(Z=3) = \frac{6}{36} = 6$, $-P(Z=4) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

$-P(Z=5) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{w \in \Omega} Z(w)\,\mathbb{P}(\{w\}) = \frac{10}{36} + \frac{16}{36} + \frac{18}{36} + \frac{16}{36} + \frac{10}{36}$$
$$= 1 + \frac{34}{36} = \frac{35}{18}$$

$$\mathbb{E}(Z^2) = \sum_{w \in \Omega} Z^2(w)\,\mathbb{P}(\{w\}) = \frac{10}{36} + \frac{32}{36} + \frac{54}{36} + \frac{64}{36} + \frac{50}{36}$$
$$= \frac{35}{6}$$

$$V(Z) = \mathbb{E}(Z^2) - \mathbb{E}^2(Z) = \frac{35}{6} - \frac{1225}{324}$$
$$= \frac{665}{324}$$