

ex 18 Puisque $f^{p-1} \neq O_{\mathcal{L}(E)}$, il existe

$\vec{u} \in E$ tel que $f^{p-1}(\vec{u}) \neq \vec{0}_E$.

$M_q(\vec{u}, f(\vec{u}), \dots, f^{p-1}(\vec{u}))$ est libre.

Soit $(a_0, \dots, a_{p-1}) \in K^p /$

$$\sum_{i=0}^{p-1} a_i f^i(\vec{u}) = \vec{0}_E.$$

On suppose que $(a_0, \dots, a_{p-1}) \neq (0, \dots, 0)$ et on note i_0 le plus petit indice tel que

$$a_i \neq 0.$$

Ainsi $a_{i_0} f^{i_0}(\vec{u}) + \sum_{i=i_0+1}^{p-1} a_i f^i(\vec{u}) = \vec{0}_E$

On applique f^{p-1-i_0} :

$$a_{i_0} f^{p-1}(\vec{u}) + \sum_{i=i_0+1}^{p-1} a_i \overbrace{f^{p+i-i_0}}^{\geq p}(\vec{u}) = \vec{0}_E.$$

Où $f^p = O_{\mathcal{L}(E)}$ donc $\forall k \geq p$ on a

$$f^k(\vec{u}) = f^{k-p}(\underbrace{f^p(\vec{u})}_{=\vec{0}_E}) = \vec{0}_E.$$

Ainsi $\underbrace{a_{i_0}}_{\neq 0} \underbrace{f^{p-1}(\vec{u})}_{\neq \vec{0}_E} = \vec{0}_E$: ceci est absurde.

2) La famille $(\vec{u}, f(\vec{v}), \dots, f^{p-1}(\vec{v}))$ est donc libre et formée de p vecteurs.

On a donc $p \leq n$.

Comme $n \geq p$ on a $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$.