$\boxed{\text{ex 17}}$ Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ / $rg(f) = 1$

Alors $\exists\, \vec{u} \in E \setminus \{\vec{0}_E\}$ tel que $Im(f) = vect(\vec{u})$.

Comme $f(\vec{u}) \in Im(f) = vect(\vec{u})$, $\exists\, \lambda \in \mathbb{K}$ /

$$f(\vec{u}) = \lambda \vec{u}.$$

Ainsi $\forall \vec{y} \in vect(\vec{u})$, $\exists\, \alpha \in \mathbb{K}$ / $\vec{y} = \alpha \vec{u}$

$$\begin{aligned} \text{et } \boxed{f(\vec{y})} &= \alpha f(\vec{u}) \\ &= \alpha \lambda \vec{u} \\ &= \boxed{\lambda \vec{y}} \end{aligned}$$

Ceci est donc valable $\forall \vec{y} \in Im(f)$

car $Im(f) = vect(\vec{u})$.

Ainsi $\forall x \in E$, $f(\vec{x}) \in Im(f) = vect(\vec{u})$

et donc $f(f(\vec{x})) = \lambda f(\vec{x})$

i.e $f^2(\vec{x}) = \lambda f(\vec{x})$.

On a donc $f^2 = \lambda f$.