Chan Kam
Poncet
Sarah
CAROUNANIDY
Curnâdevy

TD 22/23 :

Ex 15 : (TD22)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie
et $(f,g) \in \mathcal{L}(E^2)$
Mq $|rg(f) - rg(g)| \leq rg(f+g) \leq rg(f) + rg(g)$.

- Mq $Im(f+g) \subset Im(f) + Im(g)$.

Soit $\vec{y} \in Im(f+g)$ alors $\exists \vec{x} \in E /$

$\vec{y} = (f+g)(\vec{x})$

$= f(\vec{x}) + g(\vec{x})$

donc $\vec{y} \in Im(f) + Im(g)$

donc $Im(f+g) \subset Im(f) + Im(g)$

donc $\dim(Im(f+g)) \leq \dim(Im(f) + Im(g))$

Résultat du cours : si $F \subset G$ alors $\dim(F) \leq \dim(G)$

et d'après la formule de Grassman :

$\dim(Im(f) + Im(g)) = \dim(Im(f)) + \dim(Im(g)) - \dim(Im(f) \cap Im(g))$

donc $\dim(Im(f) + Im(g)) \leq \dim(Im(f)) + \dim(Im(g))$

Finalement : $\dim(Im(f+g)) \leq \dim(Im(f)) + \dim(Im(g))$

i.e $\boxed{rg(f+g) \leq rg(f) + rg(g)}$

Mq $rg(f) \leq rg(f+g) + rg(g)$

On a $f = f+g-g$

donc $rg((f+g)+(-g)) \leq rg(f+g) + rg(-g)$

donc $rg(f) \leq rg(f+g) + rg(-g)$

et on a que $Im(g) = Im(-g)$

car Soit $\vec{y} \in Im(g)$ alors $\exists \vec{x} \in E /$

$\vec{y} = g(\vec{x}) \underset{\text{par linéarité}}{=} -g(-\vec{x})$ donc $\vec{y} \in Im(-g)$

i.e $Im(g) \subset Im(-g)$

en appliquant le même raisonnement on trouve que $Im(-g) \subset Im(g)$
donc $Im(g) = Im(-g)$ donc $rg(g) = rg(-g)$

Ainsi $rg(f) \leq rg(f+g) + rg(g)$
donc $rg(f) - rg(g) \leq rg(f+g)$.
et par symétrie (en échangeant les rôles de f et g
on obtient aussi $rg(g) - rg(f) \leq rg(f+g)$

T. B

donc $|rg(f) - rg(g)| \leq rg(f+g)$

Conclusion : $|rg(f) - rg(g)| \leq rg(f+g) \leq rg(f) + rg(g)$

Ex 7 : (TD 23)

1) On pose $\mathbb{P}(X = k) = \lambda k$ pour $k \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
et on a $\sum_{k=1}^{6} \mathbb{P}(X = k) = 1$

donc $\lambda(1+2+3+4+5+6) = 1$ donc $\lambda = \frac{1}{21}$

k	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$

$$\boxed{\mathbb{E}(X)} = \sum_{k=1}^{6} k\,\mathbb{P}(X = k)$$

$$= \sum_{k=1}^{6} \frac{k^2}{21}$$

$$= \frac{1}{21} \sum_{k=1}^{6} k^2 = \frac{1}{21} \times \frac{6 \times 7(2 \times 6 + 1)}{6} = \frac{91}{21}$$

$$= \boxed{\frac{13}{3}}$$

2)

k	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$
$\mathbb{P}(Y=k)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$

$$\boxed{E(Y)} = \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{k} \mathbb{P}(Y=k)$$

NON : $P(X=k)$ (qui vaut donc $\mathbb{P}(Y=\frac{1}{k})$)

$$= \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{k} \times \frac{k}{21}$$

$$= \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{21} = 6 \times \frac{1}{21} = \boxed{\frac{2}{7}}$$

✓