

Prinat
Gabriel
Techer
Maxime
MPSI

TD 22

Exercice 9:

$$A = \{(2y-3z, y, z) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\} = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

2 vecteurs
non-colinéaires

1) On pose $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\}$

Montrons que A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$:

SEV₁ Tout élément de A s'écrit comme une combinaison linéaire de $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ donc $A \subset \mathbb{R}^3$

SEV₂ On a: $0 - 2 \times 0 + 3 \times 0 = 0$ donc $(0, 0, 0) \in A$

SEV₃ Soit $(x, y, z) \in A$ et $(x', y', z') \in A$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \text{On a: } \lambda(x - 2y + 3z) + (x' - 2y' + 3z') \\ = \lambda x - 2\lambda y + 3\lambda z + x' - 2y' + 3z' \\ = (\lambda x + x') - 2(\lambda y - y') + 3(\lambda z + z') \end{aligned}$$

$$\text{On a } (\lambda x + x', \lambda y - y', \lambda z + z') \in \mathbb{R}^3$$

Donc A est stable par combinaison linéaire.

A est donc un sous-groupe de $\mathbb{R}^3$.

Déterminons la dimension de A :

$$\text{On a: } x - 2y + 3z = 0 \iff x = 2y - 3z$$

$$\text{Donc } (x, y, z) = (2y - 3z, y, z) = y(2, 1, 0) + z(-3, 0, 1)$$

On a deux paramètres libres donc A est de dimension 2.

2) On pose $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2y = 3z\}$

Montrons que B est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

SEV₁ Pour tout élément de B , on a $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ donc $B \subset \mathbb{R}^3$

SEV₂ On a: $0 = 2 \times 0 = 3 \times 0$ donc $(0, 0, 0) \in B$

SEV₃ Soit $(x, y, z) \in B$ et $(x', y', z') \in B$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\text{On a donc: } x = 2y = 3z \quad \text{et} \quad x' = 2y' = 3z'$$

Mg
A s'écrit comme
un vecteur
car c'est un sev.

Prouver que $B = \text{vect}((3; 2; 1))$
 dispense de prouver SEV 1-2-3:
 C'est direct un sous-ev de $\mathbb{R}^3$
 de dimension 1.

Donc on a: $x = 2y = 3z$

$$\Leftrightarrow \lambda x = 2\lambda y = 3\lambda z$$

$$\Leftrightarrow \lambda x + x' = 2\lambda y + x' = 3\lambda z + x'$$

$$\Leftrightarrow \lambda x + x' = 2(\lambda y + y') = 3(\lambda z + z')$$

Donc B est stable par combinaison linéaire.

B est donc un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

Déterminons la dimension de B:

On a: $x = 2y = 3z$

$$\text{Donc } (x, y, z) = \left(x, \frac{x}{2}, \frac{x}{3}\right) = (6x, 3x, 2x) = x(6, 3, 2)$$

On a un paramètre libre donc B est de dimension 1.

3) On pose $C = \{P \in \mathbb{R}_4[X] / P(1) = 0\}$

Montrons que C est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$:

SEV₁: Tout élément de C appartient à $\mathbb{R}_4[X]$ donc $C \subset \mathbb{R}_4[X]$ ✓

SEV₂: $0_{\mathbb{R}_4[X]}$ est de degré inférieur à 4 donc $0_{\mathbb{R}_4[X]} \in \mathbb{R}_4[X]$

SEV₃: Soit $(D, E) \in \mathbb{R}_4[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\text{On a: } \deg(\lambda D) = \deg(\lambda) + \deg(D)$$

$$\text{On, } \deg(\lambda) = 0 \text{ et } \deg(D) \leq 4 \text{ donc } \deg(\lambda D) \leq 4$$

$$\text{On a: } (\lambda P + Q)(1) = \lambda P(1) + Q(1) = \lambda 0 + 0 = 0$$

Donc $\lambda P + Q$ est stable par combinaison linéaire.

C est donc un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$

Déterminons la dimension de C:

Soit $P \in C$, alors il s'écrit sous la forme:

$$P = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$$

$$\text{et } P(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$$

$$\Leftrightarrow a_0 = -a_1 - a_2 - a_3 - a_4$$

On a quatre paramètres libres donc C est de dimension 4.

et donc $C = \left\{ a_4 X^4 + a_3 X^3 + a_2 X^2 + a_1 X - (a_4 + a_3 + a_2 + a_1), (a_4, a_3, a_2, a_1) \in \mathbb{R}^4 \right\}$
 $= \text{vect}(X^4 - 1; X^3 - 1; X^2 - 1; X - 1).$

et $Q_{\mathbb{R}_4[X]}(1) = 0$

Cela ne
vect rien
dire.

4) On pose $D = \{\text{ensemble des fonctions dont la dérivée seconde est nulle}\}$

Montrons que D est un sous espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

SEV₁ D étant un ensemble de fonctions, $D \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

SEV₂ Prenons $\tilde{0}$ et calculons sa dérivée seconde :

$$(\tilde{0})'' = (\tilde{0})' = \tilde{0}, \text{ donc } \tilde{0} \in D$$

SEV₃ Soit $(f, g) \in D^2$, et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Comme f'' et g'' valent 0, ils peuvent s'écrire sous la forme :

$$f = \delta_1 x + \delta_0 \quad \text{avec } (\delta_1, \delta_0, \mu_1, \mu_0) \in \mathbb{R}^4$$

$$g = \mu_1 x + \mu_0$$

$$\begin{aligned} \text{On a donc : } \lambda f + g &= \lambda \delta_1 x + \lambda \delta_0 + \mu_1 x + \mu_0 \\ &= (\lambda \delta_1 + \mu_1) x + (\lambda \delta_0 + \mu_0) \end{aligned}$$

$$\text{De plus, } (\lambda f + g)' = \lambda \delta_1 + \mu_1$$

$$\text{et } (\lambda f + g)'' = 0$$

Donc D est stable par combinaison linéaire.

D est donc un sous espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

→ il s'agit de $\{x \mapsto ax + b; (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$

$$= \text{Vect}(\text{id}, \tilde{1})$$

qui est de dimension 2.