

Mahé PALATA

TD 22

Noé OUNE BVE

Matière SALEM exercice 5

1) $\mathcal{M}_q(E, +, \cdot)$ est un sous $\mathbb{R}$ espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

soit 1 $E \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ✓

soit 2 en choisissant $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ on a bien $0 \in E$ ✓

soit 3 soit f et g , 2 fonctions de E , avec

$$f: x \mapsto a \operatorname{sh}(x) + b \operatorname{ch}(x) + c \cdot e^x \text{ avec } (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$$

$$g: x \mapsto a' \operatorname{sh}(x) + b' \operatorname{ch}(x) + c' \cdot e^x \text{ avec } (a', b', c') \in \mathbb{R}^3$$

et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (\lambda f + g)(x) &= \lambda a \operatorname{sh}(x) + \lambda b \operatorname{ch}(x) + \lambda c \cdot e^x + a' \operatorname{sh}(x) + b' \operatorname{ch}(x) + c' \cdot e^x \\ &= \underbrace{(\lambda a + a')}_{\in \mathbb{R}} \operatorname{sh}(x) + \underbrace{(\lambda b + b')}_{\in \mathbb{R}} \operatorname{ch}(x) + \underbrace{(\lambda c + c')}_{\in \mathbb{R}} e^x \end{aligned}$$

donc E est stable par combinaisons linéaires ✓

Cette méthode
est plus
efficace!

1) alternative

on remarque que $E = \operatorname{vect}(\operatorname{sh}, \operatorname{ch}, \exp)$, donc E est bien un $\mathbb{R}$ espace vectoriel ✓

2) soit $f \in E$

$$\begin{aligned} \text{on a } f: x &\mapsto a \operatorname{sh}(x) + b \operatorname{ch}(x) + c \cdot e^x \\ &= \frac{a}{2} (e^x - e^{-x}) + \frac{b}{2} (e^x + e^{-x}) + c \cdot e^x \\ &= \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + c \right) e^x + \left(-\frac{a}{2} + \frac{b}{2} \right) e^{-x} \end{aligned}$$

$(x \mapsto e^x; x \mapsto e^{-x})$ est donc une famille génératrice

de E ✓

• $\text{mq } (x \mapsto e^x, x \mapsto e^{-x})$ est libre
soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$h: x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{-x}, \quad \text{, / } h = \tilde{0}$$

on veut $\text{mq } (\lambda, \mu) = (0, 0)$

$$\text{on a } \forall x \in \mathbb{R}, h(x) = 0 \text{ i.e. } \lambda e^x + \mu e^{-x} = 0$$

pour $x = 0$ on a

$$\lambda + \mu = 0 \quad ✓$$

pour $x = 1$ on a

$$e\lambda + \frac{1}{e}\mu = 0 \quad ✓$$

on a donc

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ e\lambda + \frac{1}{e}\mu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow L_2 \leftarrow L_2 - eL_1 \quad \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ (\frac{1}{e} - e)\mu = 0 \end{cases} \quad ✓$$

le système est de Cramer

$$\text{donc } (\lambda, \mu) = (0, 0) \quad ✓$$

donc la famille $(x \mapsto e^x, x \mapsto e^{-x})$ est libre ✓

donc $(x \mapsto e^x; x \mapsto e^{-x})$ est une base de E ✓