

2022

Maths

Théorème

TD n° 22 de
maths

Ex 13.

On considère $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et on définit l'application linéaire f par :

$$f(\vec{e}_1) = -\sqrt{2}\vec{e}_1 + \vec{e}_3 \quad f(\vec{e}_2) = \sqrt{2}\vec{e}_2 + \vec{e}_3 \quad \text{et} \quad f(\vec{e}_3) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$$

1. Exprimer l'image par f de tout vecteur (x, y, z) dans la base canonique.

On a donc $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$ et $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = f(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3) /$$

$$= x f(\vec{e}_1) + y f(\vec{e}_2) + z f(\vec{e}_3) /$$

$$= x(-\sqrt{2}\vec{e}_1 + \vec{e}_3) + y(\sqrt{2}\vec{e}_2 + \vec{e}_3) + z(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)$$

$$= -\sqrt{2}x\vec{e}_1 + z\vec{e}_1 + \sqrt{2}y\vec{e}_2 + z\vec{e}_2 + x\vec{e}_3 + y\vec{e}_3$$

$$= (-\sqrt{2}x + z; \sqrt{2}y + z; x + y) \quad \checkmark$$

2. Déterminer le noyau et l'image de f .

$$\ker(f) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 / f(\vec{x}) = \vec{0}_3 \} /$$

$$\text{Or } f(x, y, z) = (-\sqrt{2}x + z; \sqrt{2}y + z; x + y)$$

$$\text{Donc } \begin{cases} \sqrt{2}x + z = 0 \\ \sqrt{2}y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}x + z = 0 \\ x + y = 0 \\ \sqrt{2}y + z = 0 \end{cases}$$

Cet échange de lignes n'est pas indispensable.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}x + z = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}y = 0 \\ \sqrt{2}y + z = 0 \end{cases} \quad y - \frac{1}{\sqrt{2}}z = 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{Donc } \ker(f) = \{(0, 0, 0)\}$$

ainsi $\dim(\ker(f)) = 0$

*Vous avez
sauté des
étapes* →

D'après le théorème du rang on a :

$$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\operatorname{Im}(f)) + \underbrace{\dim(\ker(f))}_0$$

$$\text{Donc } \dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\operatorname{Im}(f))$$

$$\text{Donc } \dim(\operatorname{Im}(f)) = 3 \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(f) \subset \mathbb{R}^3$$

$$\text{Ainsi } \operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}^3 \text{ lui-même}$$