

Exercice 11:

On considère $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 5x + y + z - t = 0\}$

et $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - z = 0 \text{ et } x + 3y + 2z + 2t = 0\}$

1) Mq F est un sous- $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$

SEV1) $F \subset \mathbb{R}^4$ /

SEV2) $0_{\mathbb{R}^4} \in F$ $(0, 0, 0, 0) \in F$ /

SEV3) Soient $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ et $(x', y', z', t') \in \mathbb{R}^4$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

On a

$$\lambda(x, y, z, t) + (x', y', z', t') = (\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z', \lambda t + t') \in \mathbb{R}^4$$

Problème: c'est une égalité
entre un vecteur
de $\mathbb{R}^4$ et un réel.

$$\begin{aligned} & 5(\lambda x + x') + \lambda y + y' + \lambda z + z' - \lambda t - t' \in \mathbb{R} \\ & = \lambda(5x + y + z - t) + (5x' + y' + z' - t') \\ & = 0 \in F \end{aligned}$$

On a $F = \{x(5, 0, 0, 0) + y(0, 1, 0, 0) + z(0, 0, 1, 0) + t(0, 0, 0, -1) \mid (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4\}$

On a $\text{red}(F) = B_F = \{(5, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\}$

et $\dim(F) = 3$ car
hyperplan

Mq G est un sous- $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$

SEV1) $G \subset \mathbb{R}^4$

SEV2) $(0, 0, 0, 0) \in G$

SEV3) Soient $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ et $(x', y', z', t') \in \mathbb{R}^4$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

On a

$$\lambda(x, y, z, t) + (x', y', z', t') = (\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z', \lambda t + t') \in \mathbb{R}^4$$

impossible.

$$\begin{aligned} & \lambda x + x' + 3(\lambda y + y') + 2(\lambda z + z') + 2(\lambda t + t') \in \mathbb{R} \\ & = \lambda(x + 3y + 2z + 2t) + (x' + 3y' + 2z' + 2t') = 0 \end{aligned}$$

et $\lambda(x, z) + (x', z') = (\lambda x + x', \lambda z + z') = \lambda x + x' - \lambda z - z' = \lambda(x - z) + (x' - z') = 0$

Donc appartient à G

Donc G est sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$

Comme on a pour tout $(x, y, z, t) \in G$, $xc - z = 0$

on a $xc = z$ et $\dim G \leq 3$ car z peut s'exprimer en fonction de xc

Et puisque $xc + 3y - 2z + 2t = 0$

$$\text{on a : } xc + 3y - 2xc + 2t = 0$$

$$-\frac{x}{2} + \frac{3}{2}y = t$$

Ainsi on peut exprimer t uniquement en fonction de xc et y donc $\dim G \leq 2$

donc une base de G est vect $((1, 0, 1, 0),$

$(0, 3, 0, 0))$

Ce vecteur n'appartient pas à G .

2) $F \cap G$ vérifie $(x, y, z, t) \in F \cap G$

le système suivant

$$\Rightarrow \begin{cases} 5x + y + z - t = 0 \\ x + 3y + 2z + 2t = 0 \\ z = xc \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + y - t = 0 \\ 3x + 3y + 2t = 0 \\ z = xc \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1} \begin{cases} 6x + y - t = 0 \\ 5y + 5t = 0 \\ z = xc \end{cases} \quad /$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}t \\ y = -t \\ z = x = \frac{1}{3}t \end{cases} \quad \text{donc } F \cap G = \left\{ (x, y, z) = t \left(\frac{1}{3}, -1, \frac{1}{3} \right), (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \right\}$$

On a $\dim(F \cap G) = 1$ car 2 équations d'une droite

et $B_{F \cap G} = \text{vect} \left(\left(\frac{1}{3}, -1, \frac{1}{3}, 1 \right) \right)$ il faut un vecteur de $\mathbb{R}^4$!

3) D'après la Formule de Grassmann

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = 3 + 2 - 1 = 4$$

Donc $F + G$ spanne $\mathbb{R}^4$