

Exercice 4:

$$f(x) = \frac{1}{x-1} \text{ et } g(x) = \frac{1}{x+1} \text{ pour } x \in]-1, 1[$$

1. Mg (f, g) est une famille libre de $\mathcal{F}(-1, 1[, \mathbb{R})$

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} / \forall x \in]-1, 1[$

$$\alpha f(x) + \beta g(x) = 0$$

$$\alpha \left(\frac{1}{x-1} \right) + \beta \left(\frac{1}{x+1} \right) = 0 \quad \left. \vphantom{\frac{1}{x-1}} \right\} \times (x-1)(x+1)$$

$$\alpha(x+1) + \beta(x-1) = 0$$

$$\alpha x + \alpha + \beta x - \beta = 0$$

$$(\alpha + \beta)x + (\alpha - \beta) = 0$$

on a soit $\bullet \alpha + \beta = 0 \quad (1) \Rightarrow \alpha = -\beta$

$\bullet \alpha - \beta = 0 \quad (2)$

(2) : $\alpha - \beta = 0$

$\Rightarrow -\beta - \beta = 0$

$\Rightarrow \beta = 0$ donc $\alpha = 0$ ✓

Si $\alpha f(x) + \beta g(x) = 0$ alors on a bien $\alpha = 0$ et $\beta = 0$

donc (f, g) est bien une famille libre de $\mathcal{F}(-1, 1[, \mathbb{R})$

2. Soit $h(x) = \frac{2}{x^2-1}$ il faut $h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$

$$\frac{2}{x^2-1} = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x+1}$$

Tracer $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 / \forall x \in]-1, 1[$

$$\frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x+1}$$

• on multiplie par $(x-1)$ et on évalue en 1 on trouve $\alpha = 1$ ✓

• on multiplie par $(x+1)$ et on évalue en -1 on trouve $\beta = -1$ ✓

donc $\frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$

$\forall x \in]-1, 1[$ donc $h(x) \in \text{vect}(f, g)$

$\boxed{h}$