

Noch

Ex 18

Conti

Ex 18 et 19

1) Soient $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ des endomorphismes d'un $\mathbb{K}$ -ev E
tq $f_i \circ f_j = 0_{\mathcal{L}(E)}$ tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $i \neq j$ et tq $f_1 + \dots + f_n = \text{id}_E$.

Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on ~~applique~~ ^{compose} f_i à l'égalité $f_1 + \dots + f_n = \text{id}_E$,
on obtient $f_i \circ f_1 + f_i \circ f_2 + \dots + f_i \circ f_i + \dots + f_i \circ f_n = f_i$ /
car $f_i \in \mathcal{L}(E)$.

Or $\forall j \neq i$, $f_i \circ f_j = 0_{\mathcal{L}(E)}$ donc $f_i \circ f_i = f_i$.

Ainsi f_i est un projecteur, ceci étant valable par tout i dans $\llbracket 1, n \rrbracket$,
 $f_1, f_2, \dots, f_n$ sont des projecteurs. ✓

2) * Mq $E = \bigoplus_{i=1}^n \text{Im}(f_i)$ par double inclusion :

- Soit $x \in E$, alors $x = x_1 + f_i$ avec $x_i \in \text{Im}(f_i)$ et $f_i \in E \setminus \text{Im}(f_i)$
Possible car $E \setminus \text{Im}(f_1) \cup \text{Im}(f_1) = E$.

Donc $f_1(x_1 + f_1) + f_2(x_2 + f_2) + \dots + f_n(x_n + f_n) = x$! Le

Donc $\bigoplus_{i=1}^n \text{Im}(f_i) x_1 + x_2 + \dots + x_n = x$

Ainsi $x \in \bigoplus_{i=1}^n \text{Im}(f_i)$

On a alors $E \subset \bigoplus_{i=1}^n \text{Im}(f_i)$

- $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\text{Im}(f_i) \subset E$ car $f_i \in \mathcal{L}(E)$, donc $\forall x_1, \dots, x_n \in \bigoplus_{i=1}^n \text{Im}(f_i)$

$x_1 + x_2 + \dots + x_n \in E$ car E est un $\mathbb{K}$ -ev et que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_i \in E$.

Ainsi $\bigoplus_{i=1}^n \text{Im}(f_i) \subset E$.

Par double inclusion on a $E = \bigoplus_{i=1}^n \text{Im}(f_i)$

Complémentaire d'un sev
n'est (presque jamais) un
sev - ev.
C'est la notion de supplémentaire
qu'il faut utiliser.

* Montrons que l'on a bien $\bigoplus_{i=1}^n \text{Im}(f_i)$.

Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^n \text{Im}(f_i)$, $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 0_E$

Soit $j \in \{1, n\}$ on applique f_j on obtient $f_j(x_j) = 0_E$
or $x_j \in \text{Im}(f_j)$ et f_j est un projecteur sur $\text{Im}(f_j)$
par conséquent $\ker(f_j)$.

Donc $f_j(x_j) = \alpha_j = 0_E$ ✓

Ainsi $\forall j \in \{1, n\}, \alpha_j = 0_E$ ✓

On a donc bien $\bigoplus_{i=1}^n \text{Im}(f_i)$. ✓

On peut m
et

$$\begin{aligned} f \circ (-f^2 - \text{id}) &= \text{id}_E \\ (-f^2 - \text{id}) \circ f &= \text{id}_E \\ \text{donc } f &\in \text{GL}(E). \end{aligned}$$

Ex 18

(a) Soit f un endomorphisme, tq $f^3 = f^2 \circ f + \text{id}_E$.

mq f est injective:

Soit $(x_1, x_2) \in E^2$, $f(x_1) = f(x_2)$ et $x_1 \neq x_2$.

$$\text{On a } f^2(x_1) = f^2(x_2), f^3(x_1) = f^3(x_2)$$

$$\text{Donc } f^3(x_1) - f^3(x_2) = f^2(x_1) - f^2(x_2) = f^2(x_1) - f^2(x_2) - f(x_1) + f(x_2) = 0$$

ABSURDE.

Ainsi $\forall (x_1, x_2) \in E^2$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, f est injective.

~~mq f est surjective:~~

~~on a $\text{Im}(f^3) = \text{Im}(f^2) = \text{Im}(f)$, en effet $\text{Im}(f)$ est un~~

Autre preuve:

Soit $x \in \text{Ker}(f)$ alors comme $f^3(x) = f^2(x) + f(x) + x$

on a $x = 0_E$, ainsi $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$ donc f est injective.
car $f(f(f(x))) = f(f(x)) = f(x) = 0_E$.

mq f est surjective.

$\forall x \in E$ on a $f^3(x) = f^2(x) + f(x) + x$ donc $f^3(x) - f^2(x) - f(x) \in E$
or comme $f(x) \in E$ et $f^2(x) \in E$ on a $\text{Im}(f^3) \subset \text{Im}(f)$ et
 $\text{Im}(f^3) \subset \text{Im}(f)$

$\text{Im}(f)$ est un $\mathbb{K}$ -s.e.v. de E donc $f^3(x) - f^2(x) - f(x) \in \text{Im}(f)$

Ainsi $\dots \in \text{Im}(f)$ donc $E \subset \text{Im}(f)$

de $E \rightarrow E$.

f est bijective et est un endomorphisme donc $f \in \text{GL}(E)$.

(b) $g = p$ -aide avec $a \in K \setminus \{0, 1\}$ et p un projecteur de E .

Ma g est injective :

Soit $x \in \text{Ker}(g)$

On a donc $p(x) = ax$.

- On distingue 2 cas :

• Si $x \in \text{Im}(p)$ alors on aurait $ax = ax$ avec $a \in K \setminus \{0, 1\}$, possible seulement si $ax = 0$.

• Si $x \in \text{Im}(p)$, $\exists (x_1, x_2) \in \text{Im}(p) \times (E \setminus \text{Im}(p))$, $x = ax_1 + x_2$.

On aurait alors $ax_1 = aC(ax_1 + x_2)$ or $\frac{x_1}{a} \in \text{Im}(p)$ et $\frac{x_2}{1-a} \notin \text{Im}(p)$, ABSURDE donc forcément $x \in \text{Im}(p)$.

Or on a avec $ax = 0$, $g(x) = ax = p(x)$ donc $p(x) = 0$. Donc on a bien $0 \in \text{Im}(p)$.

Ainsi la seule possibilité possible et valable donc $\text{Ker}(g) = \{0\}$.

Ma g est surjective :

soit $x \in \text{Im}(p)$ alors $g(x) = x(1-a)$ $\frac{g(x)}{1-a} = x$ possible car $a \in K \setminus \{0, 1\}$, comme g est un endomorphisme $\text{Im}(\frac{g}{1-a}) \subset \text{Im}(g)$ donc $x \in \text{Im}(g)$ ainsi $\text{Im}(p) \subset \text{Im}(g)$

Or id $_E = \frac{1}{a}(g - p)$, tout $x \in E$, $\frac{g(x) - p(x)}{a} \in \text{Im}(g)$

donc $E \subset \text{Im}(g)$ donc $\text{Im}(g) = E$. $g \in GL(E)$.