

Exercice 6) $P_1 = \text{Vect}((2, 3, -1), (1, -1, 2))$

$P_2 = \text{Vect}((3, 7, 0), (5, 0, 7))$

My $P_1 = P_2$

- Vérifions si $(2, 3, -1)$ n'est pas une combinaison linéaire des vecteurs $(3, 7, 0)$ et $(5, 0, 7)$.

C'est à dire: Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

$$(2, 3, -1) = \lambda(3, 7, 0) + \mu(5, 0, 7)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 3\lambda + 5\mu \\ 3 = 7\lambda \\ -1 = 7\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 3 \times \frac{3}{7} + 5\mu = \frac{14}{7} = 2 \\ \lambda = \frac{3}{7} \\ \mu = -\frac{1}{7} \end{cases}$$

On a $(2, 3, -1) = \frac{3}{7}(3, 7, 0) + \frac{1}{7}(5, 0, 7)$ ✓

Donc $(2, 3, -1) \in \text{Vect}((3, 7, 0), (5, 0, 7))$. ✓

- De même vérifions pour $(1, -1, 2)$:

$$(1, -1, 2) = \lambda(3, 7, 0) + \mu(5, 0, 7)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 3\lambda + 5\mu \\ -1 = 7\lambda + 0\mu \\ -2 = \lambda \times 0 - 7\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = -\frac{3}{7} + \frac{10}{7} = 1 \\ \lambda = -\frac{1}{7} \\ \mu = \frac{2}{7} \end{cases}$$

On a $(1, -1, 2) = -\frac{1}{7}(3, 7, 0) + \frac{2}{7}(5, 0, 7)$

Donc $(1, -1, 2) \in \text{Vect}((3, 7, 0), (5, 0, 7))$ ✓

On a donc $P_2 = \text{Vect}((3, 7, 0), (5, 0, 7), (2, 3, -1), (1, -1, 2))$

- Vérifions si $(3, 7, 0)$ n'est pas une combinaison linéaire des vecteurs $(2, 3, -1)$ et $(1, -1, 2)$.

C'est à dire:

$$(3, 7, 0) = \lambda(2, 3, -1) + \mu(1, -1, 2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 = 2\lambda + \mu \\ 7 = 3\lambda - \mu \\ 0 = -\lambda - 2\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = -4\mu + \mu \\ 7 = -6\mu - \mu \\ \lambda = -2\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = -1 \\ \lambda = 2 \end{cases}$$

Donc $(3, 7, 0) = 2(2, 3, -1) - (1, -1, -2)$ ✓

Donc $(3, 7, 0) \in \text{Vect}((2, 3, -1), (1, -1, -2))$ ✓

• De même pour $(5, 0, -7)$.

$$(5, 0, -7) = \lambda(2, 3, -1) + \mu(1, -1, -2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5 = 2\lambda + \mu \\ 0 = 3\lambda - \mu \\ -7 = -\lambda - 2\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 = 5\lambda \\ \mu = 3\lambda \\ -7 = -7\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = 3 \end{cases}$$

Donc $(5, 0, -7) = (2, 3, -1) + 3(1, -1, -2)$ ✓

Donc $(5, 0, -7) \in \text{Vect}((2, 3, -1), (1, -1, -2))$ ✓

Donc $P_1 = \text{Vect}((5, 0, -7), (3, 7, 0), (2, 3, -1), (1, -1, -2))$ ✓

On a: $\boxed{P_1 = P_2}$ ✓

Exercice 12) Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et p un projecteur de E .

Ma $(f(\text{Im}(p)) \subset \text{Im}(p) \text{ et } f(\text{Ker}(p)) \subset \text{Ker}(p)) \Leftrightarrow (f \circ p = p \circ f)$

~~Ma~~ On a $p \circ p = p$ donc $E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p)$

p est donc le projecteur sur $\text{Im}(p)$ parallèlement à $\text{Ker}(p)$. ✓

$\Rightarrow$ Soit $\vec{x} \in E$, $\exists! (\vec{x}_F, \vec{x}_G) \in \text{Im}(p) \times \text{Ker}(p) /$
 $\vec{x} = \vec{x}_F + \vec{x}_G$

• $f \circ p(\vec{x}) = f(\vec{x}_F)$. ✓

• $p \circ f(\vec{x}) = p \circ f(\vec{x}_F) + p \circ f(\vec{x}_G)$ (car $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$)

or $\exists \vec{x}_H \in \text{Ker}(p) / f(\vec{x}_G) = \vec{x}_H$ (car $f(\text{Ker}(p)) \subset \text{Ker}(p)$)

et $\exists \vec{x}_I \in E / p(\vec{x}_I) = f(\vec{x}_F)$ (car $f(\text{Im}(p)) \subset \text{Im}(p)$).

donc on a $p \circ p(\vec{x}_I) = p \circ f(\vec{x}_F)$ donc $p \circ f(\vec{x}_F) = f(\vec{x}_F)$ ✓

$$\text{donc } p \circ f(\vec{x}_F) + p \circ f(\vec{x}_G) = f(\vec{x}_F) + p(\vec{x}_G) \\ = f(\vec{x}_F) \quad \text{car } \vec{x}_G \in \ker(p) \quad \checkmark$$

On a donc $\forall x \in E, p \circ f(\vec{x}) = f \circ p(\vec{x})$. $\checkmark$
 Donc $[p \circ f = f \circ p] \quad \checkmark$

⇐ Soit $\vec{x} \in f(\text{Im}(p))$. donc $\exists \vec{v} \in \text{Im}(p) / \vec{x} = f(\vec{v})$.

$$\text{Donc } p(\vec{x}) = p \circ f(\vec{v}) = f \circ p(\vec{v}) \quad \checkmark$$

or $\vec{v} \in \text{Im}(p)$ donc $p(\vec{v}) = \vec{v}$. $\checkmark$

$$\text{Donc } p(\vec{x}) = f(\vec{v}) = \vec{x} \quad \text{donc } [\vec{x} \in \text{Im}(p)] \quad \checkmark$$

• Soit $\vec{x} \in f(\ker(p))$ donc $\exists \vec{v} \in \ker(p) / \vec{x} = f(\vec{v})$.

$$\text{Donc } p(\vec{x}) = p \circ f(\vec{v}) = f \circ p(\vec{v}) \quad \checkmark$$

$$[p(\vec{x}) = f(\vec{0}_E) = \vec{0}_E] \quad \left(\begin{array}{l} \text{car } f \in \mathcal{L}(E) \text{ donc} \\ f(\vec{0}_E) = \vec{0}_E \end{array} \right)$$

$$\text{Donc } \vec{x} \in \ker(p).$$

On a bien $f(\text{Im}(p)) \subset \text{Im}(p)$ et $f(\ker(p)) \subset \ker(p)$.

Exercice 16)

1. Soit $\vec{x} \in \ker(f)$ alors $f(\vec{x}) = \vec{0}_E$ $\checkmark$

$$\left(\begin{array}{l} \text{car } f \in \mathcal{L}(E) \\ \text{donc } f(\vec{0}_E) = \vec{0}_E \end{array} \right) \left(\begin{array}{l} \text{donc } f^2(\vec{x}) = f(\vec{0}_E) \\ = \vec{0}_E \end{array} \right) \quad \checkmark$$

On a donc $\vec{x} \in \ker(f^2)$. donc $[\ker(f) \subset \ker(f^2)] \quad \checkmark$

• Soit $\vec{x} \in \text{Im}(f^2)$ alors $\exists \vec{y} \in E / f^2(\vec{y}) = \vec{x}$

On pose $\vec{v} = f(\vec{y})$.

On a donc $\vec{x} = f(\vec{v}) \in \text{Im}(f)$.

On a bien $[\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)] \quad \checkmark$

↑ idem: il faut encore prouver $\supset$.

il manque l'inclusion $\supset$.

2. Mg $(\ker(f) \cap \operatorname{Im}(f) = \{\vec{0}_E\}) \Leftrightarrow (\ker(f^2) = \ker(f)).$

$\Rightarrow$

On a déjà $\ker(f) \subset \ker(f^2).$

Mg $\ker(f^2) \subset \ker(f).$

Soit $\vec{x} \in \ker(f^2)$ alors $f \circ f(\vec{x}) = \vec{0}_E.$

Or $f(\vec{x}) \in \operatorname{Im}(f)$ et $f(\vec{x}) \in \ker(f).$

Donc $f(\vec{x}) = \vec{0}_E$. donc $x \in \ker(f).$

On a bien $[\ker(f^2) = \ker(f)]$ ✓

$\Leftarrow$

Soit $\vec{x} \in \ker(f) \cap \operatorname{Im}(f)$. On a $f(\vec{x}) = \vec{0}_E.$

et aussi $\exists y \in E / f(\vec{y}) = \vec{x}.$

$f(\vec{x}) = f \circ f(\vec{y}) = \vec{0}_E$. Donc $\vec{y} \in \ker(f^2) = \ker(f).$

On a donc $f(\vec{y}) = [\vec{0}_E = \vec{x}]$

On a donc $\ker(f) \cap \operatorname{Im}(f) = \vec{0}_E$. ✓