

Intégration

Résultats et preuves à connaître

Proposition 1 Ensemble des solutions d'une équation linéaire

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $b \in F$ alors l'ensemble des solutions de l'équation

$$f(x) = b, \text{ est}$$

- Soit l'ensemble vide
- Soit un sous-espace affine de E de la forme $x_p + \ker(f)$ où x_p est une solution particulière de l'équation.

Proposition 2

Rappeler la définition d'uniforme continuité. Démontrer que si f est lipschitzienne alors elle est uniformément continue.

Énoncer le théorème de Heine puis donner un exemple de fonction continue sur \mathbb{R} qui n'est pas uniformément continue.

Proposition 3 Lemme d'approximation par des fonctions en escalier

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier φ_ε et ψ_ε sur $[a, b]$ telle que

$$\varphi_\varepsilon \leq f \leq \psi_\varepsilon \quad \text{et} \quad 0 \leq \psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon \leq \varepsilon$$

Définition 1 Donner la définition et montrer que les deux valeurs sont égales : on utilisera le lemme d'approximation

Soit $f \in \mathcal{C}_m^0([a, b])$.

On pose $I_-(f) = \sup \left\{ \int_a^b \varphi \mid \varphi \in \mathcal{E}([a, b]), \varphi \leq f \right\}$ et $I_+(f) = \inf \left\{ \int_a^b \psi \mid \psi \in \mathcal{E}([a, b]), f \leq \psi \right\}$.

Ces deux valeurs sont finies et égales ; leur valeur commune est appelée intégrale de f sur l'intervalle $[a, b]$.

Proposition 4 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $(f, g) \in \mathcal{C}_m^0([a, b])^2$. Alors

$$\left(\int_a^b fg \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2 \right) \left(\int_a^b g^2 \right)$$

Proposition 5 Inégalité de Minkowski

Soit $(f, g) \in \mathcal{C}_m^0([a, b])^2$. Alors

$$\sqrt{\int_a^b (f+g)^2} \leq \sqrt{\int_a^b f^2} + \sqrt{\int_a^b g^2}$$

Proposition 6 Théorème de l'intégrale nulle

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Si f est continue sur $[a, b]$, $f \geq 0$ et $\int_a^b f = 0$

Alors $f = 0$.

Proposition 7 Cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient $(f, g) \in \mathcal{C}^0([a, b])^2$.

On a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz si et seulement si f et g sont proportionnelles.

Proposition 8 Sommes de Riemann

Si f est continue sur $[a, b]$ alors $(S_n(f))$ converge vers $\int_a^b f$. On choisira ici une subdivision régulière, et donc

$$S_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)$$

Proposition 9 Généralisation aux fonctions à valeurs complexes

Les deux propriétés sont à connaître, une seule sera à démontrer, au choix de l'interrogateur

• $I : \begin{cases} \mathcal{C}_m^0([a, b], \mathbb{C}) & \rightarrow & \mathbb{C} \\ f & \mapsto & \int_a^b f \end{cases}$ est une forme linéaire.

• Soit $f \in \mathcal{C}_m^0([a, b])$, alors

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

Proposition 10 Intégrale fonction de sa borne supérieure

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ où I est un segment de \mathbb{R} et $a \in I$.

Si f est continue sur I alors $F_a : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I et $F_a' = f$.

Proposition 11 Ensemble des primitives

Toute fonction continue sur un segment I admet une infinité de primitives qui diffèrent entre elles d'une constante.

De plus, $F_a : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a .

Proposition 12 Théorème fondamental de l'intégration

i) Soit $f \in \mathcal{C}^0(I)$ où I est un segment de \mathbb{R} . Soit G une primitive de f sur I alors

$$\int_a^x f(t) dt = G(x) - G(a).$$

Proposition 13 Formule de Taylor avec reste intégral

Soit f de classe \mathcal{C}^{n+1} sur I et $a \in I$. Pour tout $b \in I$, on a

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Proposition 14 Conséquence : Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit f de classe \mathcal{C}^{n+1} sur I . On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que $|f^{(n+1)}| \leq M$ sur I , alors pour tout $b \in I$:

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

À savoir faire

- Calculer des intégrales : IPP, changement de variable
- Savoir appliquer les formules de Taylor avec reste intégrale et l'inégalité de Taylor Lagrange
- Savoir reconnaître des sommes de Riemann, ce qui permet de déterminer la limite d'une suite de la forme $\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k \frac{b-a}{n})$
- Utiliser l'inégalité triangulaire, l'inégalité de la moyenne pour majorer une intégrale (application : pour montrer que $I_n = \int_a^b f_n(t) dt \rightarrow 0$ où f_n est une suite de fonctions par exemple)
- Justifier qu'une fonction est uniformément continue/ lipschitzienne.
- En deuxième exercice : tout sur les matrices d'applications linéaires

Ce qu'en dit le programme

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Continuité uniforme

Continuité uniforme.
Théorème de Heine.

Exemple des fonctions lipschitziennes.
La démonstration n'est pas exigible.

b) Fonctions continues par morceaux

Subdivision d'un segment, pas d'une subdivision.
Fonction en escalier, fonction continue par morceaux.

Les fonctions sont définies sur un segment et à valeurs dans \mathbb{K} .
Structure de sous-espace vectoriel et de sous-anneau de l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur un segment à valeurs dans \mathbb{K} .

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

c) Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment à valeurs dans \mathbb{K} .

Le programme n'impose pas de construction particulière. Interprétation géométrique de l'intégrale.

Notations $\int_{[a,b]} f$, $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t) dt$.

Linéarité, positivité et croissance de l'intégrale.

Inégalité triangulaire intégrale : $\left| \int_{[a,b]} f \right| \leq \int_{[a,b]} |f|$.

Relation de Chasles.

Extension de la notation $\int_a^b f(t) dt$ au cas où $b \leq a$.
Propriétés correspondantes.

Si f est continue, à valeurs dans \mathbb{R}^+ et si $\int_{[a,b]} f = 0$, alors $f = 0$.

Intégrale d'une fonction paire ou impaire sur un segment centré en 0. Intégrale d'une fonction périodique sur un intervalle de période.

Valeur moyenne d'une fonction continue par morceaux sur un segment.

d) Sommes de Riemann

Pour f continue par morceaux sur le segment $[a, b]$,

Interprétation géométrique.

Démonstration exigible pour f lipschitzienne.

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt.$$

e) Lien entre intégrale et primitive

Dérivation de $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ pour f continue.

Toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives.

f) Formules de Taylor globales

Formule de Taylor avec reste intégral et inégalité de Taylor-Lagrange.

L'égalité de Taylor-Lagrange est hors programme.
On souligne la différence de nature entre la formule de Taylor-Young (locale) et les formules de Taylor globales.