

Variation aléatoires (fin) et matrices d'applications linéaires

Résultats et preuves à connaître

Proposition 1 Variance d'une somme de v.a.r

Soit X_1, \dots, X_n sont des variables aléatoires définies sur Ω alors

$$\bullet V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(X_i, X_j).$$

$$\bullet \text{ Si les variables sont deux-à-deux indépendantes alors } V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i).$$

Proposition 2 Correspondance matrice - application linéaire

Soit E et F sont des \mathbb{K} -ev de bases $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq p}$ et $\mathcal{B}' = (e'_i)_{1 \leq i \leq n}$.

L'application $\Psi : \begin{cases} \mathcal{L}(E, F) & \rightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f & \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) \end{cases}$ est une bijection.

Proposition 3 Produit matriciel

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ où E, F et G des \mathbb{K} -ev de bases respectives $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ et \mathcal{B}'' , alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}''}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}''}(g) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$$

Proposition 4 Matrice inverse

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n et de base $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$.

f est un automorphisme de E si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est inversible soit

$$f \in GL(E) \iff \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in GL_n(\mathbb{K})$$

De plus, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)^{-1}$.

Proposition 5 Formule de changement de bases pour un endomorphisme

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ avec E \mathbb{K} -ev de bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' . On pose $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $A' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$. Alors,

$$A = PA'P^{-1} \quad \text{avec} \quad P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$$

Proposition 6 Caractérisation des matrices de rang r

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

$\text{rg}(M) = r \iff \exists (P, Q) \in GL_n(\mathbb{K}) \times GL_p(\mathbb{K}), M = PJ_rQ$

Proposition 7 Caractérisation de la similitude des matrices

Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables si et seulement si elles représentent un même endomorphisme f d'un espace vectoriel E de dimension n (chacune dans une certaine base).

Définition 1 Trace d'un endomorphisme

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension finie $n > 1$ et $f \in \mathcal{L}(E)$.

On appelle trace de f , notée $\text{tr}(f)$, est la trace de la matrice de f dans une base quelconque de E . Elle est bien définie car elle est indépendante de la base choisie (à savoir démontrer)

Proposition 8 Trace d'un projecteur

Si p est un projecteur de E alors $\text{tr}(p) = \text{rg}(p)$.

Proposition 9 Caractérisation du rang par les matrices extraites

Soit $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$.

Alors le rang de A est la dimension de la plus grande matrice carrée inversible extraite de A .

Proposition 10 Caractérisation de la similitude des matrices

Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables si et seulement si elles représentent un même endomorphisme f d'un espace vectoriel E de dimension n (chacune dans une certaine base).

Proposition 11 Opérations élémentaires

Connaître les opérations élémentaires "autorisées" et montrer qu'elles correspondent à multiplier par une matrice (dont il faut connaître l'expression) à gauche pour les lignes (resp. à droite pour les colonnes). (démonstration par le calcul du produit uniquement pour les opérations sur les lignes).

Proposition 12 Proposition

Les opérations élémentaires sur les colonnes (respectivement lignes) conservent l'image (respectivement le noyau). Les opérations élémentaires conservent le rang.

À savoir faire

- Montrer que deux matrices sont semblables, ou au contraire ne le sont pas (dans ce cas, penser à utiliser les invariants de similitude)
- Savoir utiliser les formules de changement de base pour trouver la matrice dans la base canonique d'une application dont la matrice est simple dans une autre base (par exemple : projecteur ou symétrie)
- Donner la matrice d'une application linéaire de E vers F dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{B}'
- Calculer la trace d'un endomorphisme
- Appliquer la méthode du pivot de Gauss pour déterminer le rang d'une famille de vecteurs, d'une matrice.
- Appliquer la méthode du pivot de Gauss pour déterminer si une matrice est inversible, pour l'inverser lorsque cela est possible.
- Déterminer l'image et le noyau d'une application linéaire à l'aide d'une résolution de système linéaire

Ce qu'en dit le programme

A - Matrices et applications linéaires

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Matrice d'une application linéaire dans des bases

Matrice d'un vecteur, d'une famille de vecteurs dans une base, d'une application linéaire dans un couple de bases, d'un endomorphisme dans une base.

Isomorphisme d'espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E, F)$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ induit par le choix d'un couple de bases.

Isomorphisme d'espaces vectoriels et d'anneaux de $\mathcal{L}(E)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ induit par le choix d'une base.

Coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire.

Matrice d'une composée d'applications linéaires. Lien entre matrices inversibles et isomorphismes.

Exemple : matrice, dans la base $(1, i)$ de \mathbb{C} vu comme plan vectoriel réel, de la similitude de multiplicateur $a + ib$.

Cas particulier des endomorphismes.

b) Application linéaire canoniquement associée à une matrice

Application linéaire canoniquement associée à une matrice.

Noyau, image et rang d'une matrice.

Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si son noyau est réduit au sous-espace nul, ou si et seulement si ses colonnes engendrent l'espace \mathbb{K}^n ou si et seulement si son rang est n .

Toute matrice carrée inversible à gauche ou à droite est inversible.

On identifie ici $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et \mathbb{K}^n .

Les colonnes engendrent l'image, les lignes donnent un système d'équations du noyau.

Retour sur la condition d'inversibilité d'une matrice triangulaire.

Lien entre les diverses notions de rang.

c) Systèmes linéaires

Interprétation de l'ensemble des solutions d'un système homogène comme noyau d'une matrice. Rang d'un tel système, dimension de l'espace des solutions.

Le système $AX = B$ est compatible si et seulement si B appartient à l'image de A .

Si A est carrée et inversible, le système $AX = B$ possède une unique solution.

Structure affine de l'ensemble des solutions.

Dans ce cas, le système est dit de Cramer.

B - Changements de bases, équivalence et similitude

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Changements de bases

Matrice de passage d'une base à une autre.
 Inversibilité et inverse d'une matrice de passage.
 Effet d'un changement de base sur la matrice d'un vecteur.
 Effet d'un changement du couple de bases sur la matrice d'une application linéaire.
 Effet d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme.

Exemples de recherche d'une base dans laquelle la matrice d'un endomorphisme donné est simple.

b) Matrices équivalentes et rang

Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est de rang r , il existe un couple de bases dans lequel u a pour matrice J_r .
 Matrices équivalentes.
 Une matrice est de rang r si et seulement si elle est équivalente à J_r .
 Invariance du rang par transposition.
 Rang d'une matrice extraite. Caractérisation du rang par les matrices carrées extraites.
 Les opérations élémentaires sur les colonnes (resp. lignes) conservent l'image (resp. le noyau). Les opérations élémentaires conservent le rang.

La matrice J_r a tous ses coefficients nuls à l'exception des r premiers coefficients diagonaux, égaux à 1.

Classification des matrices équivalentes par le rang.

Application : calcul du rang.

c) Matrices semblables et trace

Matrices semblables.
 Trace d'une matrice carrée.
 Linéarité de la trace, relation $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$, invariance par similitude.
 Trace d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie. Linéarité, relation $\text{tr}(uv) = \text{tr}(vu)$.

Interprétation géométrique.
 Exemples de recherche d'une matrice simple semblable à une matrice donnée.
 Notation $\text{tr}(A)$.

Notation $\text{tr}(u)$.
 Trace d'un projecteur.