

DS n°9 : concours blanc
Épreuve de mathématiques

Durée : 4 heures

L'évaluation se faisant principalement sur la qualité de la rédaction, vous soignerez la précision et la concision des arguments que vous avancerez au cours des démonstrations ainsi que la présentation de vos résultats en les encadrant ou les soulignant.

Vous n'oubliez pas de faire une marge à gauche sur chaque feuille, de bien inscrire le numéro des exercices ainsi que de numéroter vos copies avant de les rendre.

La calculatrice est interdite.

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Une urne contient n boules indiscernables : deux sont blanches et les autres sont noires. On tire une à une et sans remise les n boules de l'urne. On désigne par X la variable aléatoire égale au rang de la première boule blanche tirée. On notera B_k l'événement "la $k^{\text{ème}}$ boule tirée est blanche".

1. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On note p_k la probabilité pour que X prenne la valeur k . Déterminer la loi de probabilités de X . On citera le nom du théorème utilisé et on expliquera clairement comment il s'applique à cette situation.
2. Vérifier que la somme des probabilités vaut 1.
3. Calculer l'espérance et la variance de X .
4. On désigne par Y la variable aléatoire égale au rang de la deuxième boule blanche tirée. A l'aide des questions précédentes établir la loi de probabilités de Y puis calculer son espérance et sa variance.

Exercice 2

Dans tout cet exercice, on se place dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$. On pose par ailleurs $F = \text{Vect}((1, 1, 0, 2), (1, 1, 1, 1))$ et $G = \{(x, y, z, t) \in E \mid x - y - z = y - z - t = 0\}$.

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E , et donner une base et la dimension de chacun d'eux.
2. Montrer que F et G sont supplémentaires.
3. On s'intéresse désormais à la famille $\mathcal{F} = ((1, 0, 1, -1), (1, 1, 0, 1), (0, -1, 1, -2))$. Cette famille est-elle libre?
4. Montrer rigoureusement que $\text{Vect}(\mathcal{F}) = G$.
5. Décomposer le vecteur $u = (1, 2, 3, 4)$ sous la forme $u = u_F + u_G$, avec $u_F \in F$ et $u_G \in G$.

Exercice 3

On s'intéresse dans cet exercice à la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et déterminer deux réels a et b tels que $A^2 = aA + bI_2$.
2. En déduire l'existence pour tout entier naturel n de réels a_n et b_n tels que $A^n = a_nA + b_nI_2$ (on ne demande pas de calculer explicitement les valeurs de a_n et b_n).
3. Déterminer la dimension et une base de l'espace vectoriel $F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$.
4. La famille (I_2, A, A^2, A^3) est-elle une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$? Sinon, précisez la dimension de $\text{Vect}(I_2, A, A^2, A^3)$.
5. On pose $G = \{P(A) \mid P \in \mathbb{R}[X]\}$. Autrement dit, G contient toutes les matrices qui sont combinaisons linéaires des puissances de A .
 - (a) Montrer que $G = \text{Vect}(A, I_2)$ (on a bien sûr le droit d'exploiter les premières questions de l'exercice).
 - (b) Montrer que $G = F$.
6. Déterminer l'intersection de F et du sous-espace vectoriel H de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ constitué des matrices dont la trace est nulle.
7. Que vaut $F + H$ (aucun calcul nécessaire)?

Exercice 4 : Étude de deux applications

On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. On définit les deux applications suivantes

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & \frac{1}{2} \left[P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right) \right] \end{array} \quad \text{et} \quad \varphi: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & P(1) \end{array}$$

1. Vérifier que f est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$ et montrer que f est linéaire.
2. Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ en indiquant les calculs intermédiaires.
3. L'application f est-elle injective ? surjective ?
4. Déterminer une base du noyau de la forme linéaire φ . Quelle est la dimension de $\ker \varphi$?
5. L'application φ est-elle injective ? surjective ?

Exercice 5

On considère l'application $f: \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto (4x - y - 2z, -x + 2z, 5x - y - 3z) \end{cases}$.

1. Montrer que f est une application linéaire (en rédigeant vraiment le calcul).
2. Montrer, en faisant le moins de calculs possible, que $\ker(f - id) \subset \ker((f - id)^2)$.
3. Déterminer une base et la dimension de $\ker(f - id)$.
4. Calculer explicitement l'expression de $(f - id)^2$.
5. Déterminer une base et la dimension de $\ker((f - id)^2)$. Montrer qu'on peut écrire $\ker((f - id)^2) = \text{Vect}(e_1, e_2)$, avec $e_1 \in \ker(f - id)$ et $e_2 \notin \ker(f - id)$.
6. Calculer une base et la dimension de $\ker(f + id)$.
7. Montrer que la famille obtenue en complétant (e_1, e_2) à l'aide d'un vecteur non nul $e_3 \in \ker(f + id)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
8. Calculer les coordonnées d'un vecteur $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ dans la base (e_1, e_2, e_3) .
9. Pour tout entier $n \geq 1$, calculer $f^n(e_1)$ et $f^n(e_3)$ (très peu de calculs nécessaires normalement).
10. Montrer que, $\forall n \geq 1, f^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (f - id)^k$. En déduire la valeur de $f^n(e_2)$.
11. Déduire des questions précédentes une expression explicite de $f^n(x, y, z)$.

Exercice 6

1. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. Soit $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires dont l'univers image est fini (et qui est le même pour toutes ces variables aléatoires), indépendantes, de même loi.

On pose $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$.

Prouver que: $\forall a \in]0, +\infty[, P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geq a\right) \leq \frac{V(Y_1)}{na^2}$.

3. **Application:** On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires.

À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre 0,35 et 0,45?

Indication : considérer la suite (Y_i) de variables aléatoires de Bernoulli où Y_i vaut 1 si la i^{eme} boule tirée est rouge et 0 sinon.