

Correction du DS n°9 (concours blanc)

Épreuve de mathématiques

Durée : 4 heures

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Une urne contient n boules indiscernables : deux sont blanches et les autres sont noires. On tire une à une et sans remise les n boules de l'urne. On désigne par X la variable aléatoire égale au rang de la première boule blanche tirée.

On notera B_k l'événement "la $k^{\text{ème}}$ boule tirée est blanche".

- Comme X désigne le rang de la première boule blanche tirée, il restera toujours une autre boule blanche dans l'urne donc $X(\Omega) = \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.
Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, notons N_k et B_k respectivement les événements « tirer une boule noire au rang k » et « tirer une boule blanche au rang k ». On a donc $\overline{B_k} = N_k$.

Par définition, $p_k = P(X = k) = P(N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_{k-1} \cap B_k)$.

On en déduit, d'après la formule des probabilités composées, que pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$,

$$p_k = P(N_1)P_{N_1}(N_2)P_{N_1 \cap N_2}(N_3) \dots P_{N_1 \cap \dots \cap N_{k-1}}(B_k) = \frac{n-2}{n} \times \frac{n-3}{n-1} \times \dots \times \frac{n-k}{n-(k-2)} \times \frac{2}{n-(k-1)}$$

On aboutit finalement à : $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, p_k = \frac{2(n-k)}{n(n-1)}$

$$2. \sum_{k=1}^{n-1} p_k = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2(n-k)}{n(n-1)} = \frac{2}{n(n-1)} \left[\sum_{k=1}^{n-1} n - \sum_{k=1}^{n-1} k \right] = \frac{2}{n(n-1)} \left[n(n-1) - \frac{n(n-1)}{2} \right] = 1$$

$$3. E(X) = \sum_{k=1}^{n-1} k p_k = \sum_{k=1}^{n-1} k \frac{2(n-k)}{n(n-1)} = \frac{2}{n(n-1)} \left[n \sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \right] = \frac{2}{n(n-1)} \left[\frac{n^2(n-1)}{2} - \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \right]$$

$$= n - \frac{2n-1}{3}$$

On en déduit finalement que $E(X) = \frac{n+1}{3}$

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{n-1} k^2 p_k = \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \frac{2(n-k)}{n(n-1)} = \frac{2}{n(n-1)} \left[n \sum_{k=1}^{n-1} k^2 - \sum_{k=1}^{n-1} k^3 \right] = \frac{2}{n(n-1)} \left[\frac{n^2(n-1)(2n-1)}{6} - \frac{n^2(n-1)^2}{4} \right]$$

$$= \frac{n(2n-1)}{3} - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2+n}{6}$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{n^2+n}{6} - \left(\frac{n+1}{3} \right)^2 = \frac{n^2-n-2}{18}$$

On en déduit finalement que $V(X) = \frac{(n+1)(n-2)}{18}$

- Comme Y désigne le rang de la deuxième boule blanche tirée, cette boule sera toujours tirée après la première boule blanche dans l'urne donc $Y(\Omega) = \llbracket 2, n \rrbracket$.

Si on note Z la variable aléatoire qui désigne le rang de la deuxième boule blanche tirée mais en comptant cette fois par la fin, on a alors $Z = n+1 - Y$. On a $Z(\Omega) = \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

Par symétrie du comptage, Z suit la même loi de probabilités que X .

D'où pour tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $P(Y = k) = P(Z = n+1-k) = p_{n+1-k}$.

soit finalement $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, P(Y = k) = \frac{2(k-1)}{n(n-1)}$

De plus, $E(Y) = E(n+1-Z) = n+1 - E(Z) = n+1 - \frac{n+1}{3}$ donc $E(Y) = \frac{2(n+1)}{3}$

$V(Y) = V(n+1-Z) = (-1)^2 V(Z)$ donc $V(Y) = \frac{(n+1)(n-2)}{18}$.

Exercice 2

1. Pour F , c'est un sous-espace vectoriel par définition. La famille $((1, 1, 0, 2), (1, 1, 1, 1))$ en est une famille génératrice, et ses deux vecteurs n'étant pas proportionnels, elle est également libre, donc forme une base de F . En particulier, $\dim(F) = 2$. Pour obtenir une famille génératrice de G (et prouver qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel), on résout le système, ce qui est ici immédiat : $x = y + z$ et $t = y - z$, donc $G = \{(y+z, y, z, y-z) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}((1, 1, 0, 1), (1, 0, 1, -1))$. La famille obtenue est libre (vecteurs non proportionnels) et forme donc une base de G , qui est de dimension 2.
2. On sait déjà que $\dim(F) + \dim(G) = 2 + 2 = 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$. Intéressons-nous donc à l'intersection des deux sous-espaces : si $u(x, y, z, t) \in F \cap G$, alors $u = a(1, 1, 0, 2) + b(1, 1, 1, 1) = (a+b, a+b, b, 2a+b)$, et $u = c(1, 1, 0, 1) + d(1, 0, 1, -1) = (c+d, c, d, c-d)$. L'égalité des formules pour les deux coordonnées centrales impose $c = a+b$ et $d = b$. On remplace alors dans les deux autres équations : $a+b = a+2b$ et $2a+b = a$, ce qui implique facilement $b = 0$ (première équation) puis $a = 0$, donc $u = 0$. On a donc prouvé que $F \cap G = \{0\}$. Avec la condition sur les dimensions, cela suffit à démontrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^4$.
3. Supposons qu'une combinaison linéaire de ces trois vecteurs s'annule :

$$a(1, 0, 1, -1) + b(1, 1, 0, 1) + c(0, -1, 1, -2) = 0.$$

On résout le système correspondant :

$$\begin{cases} a+b=0 \\ a-c=0 \\ a+c=0 \\ -a+b-2c=0 \end{cases}.$$

La deuxième équation donne $b = c$, la troisième $a = -c$. La première équation $a+b=0$ est alors automatiquement vérifiée, et la dernière devient $c+c-2c=0$ qui est également vraie. Le système n'est donc pas un système de Cramer. Par exemple, $a = -1, b = 1$ et $c = 1$ en est une solution non triviale, et la famille n'est donc pas libre. ON peut par exemple écrire $(0, -1, 1, -2) = (1, 0, 1, -1) - (1, 1, 0, 1)$.

4. Puisque notre troisième vecteur est combinaison linéaire des deux premiers de la famille, $\text{Vect}(\mathcal{F}) = \text{Vect}((1, 0, 1, -1), (1, 1, 0, 1)) = G$.
5. En reprenant les notations utilisées dans la deuxième question, on peut écrire $u_F = (a+b, a+b, b, 2a+b)$ et $u_G = (c+d, c, d, c-d)$, ce qui nous donne à résoudre le système $\begin{cases} a+b+c+d=1 \\ a+b+c=2 \\ b+d=3 \\ 2a+b+c-d=4 \end{cases}$. La différence des deux premières équations impose $d = -1$, puis la troisième équation donne $b = 3 - d = 4$. Il reste alors les deux équations $a+c = -2$ et $2a+c = -1$. On soustrait pour obtenir $a = 1$, puis on en déduit $c = -3$. Notre système a donc comme prévu une solution unique $(1, 4, -3, -1)$, et on calcule ensuite aisément $u_F = (5, 5, 4, 6)$ et $u_G = (-4, -3, -1, -2)$.

Exercice 3

On s'intéresse dans cet exercice à la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

- Un calcul rapide donne $A^2 = \begin{pmatrix} 22 & 6 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$. Les coefficients en-dehors de la diagonale ont donc été multipliés par 3 lors du passage de A à A^2 , et on en déduit rapidement que $A^2 = 3A + 10I_2$.
- C'est une récurrence : pour $n = 0$, on peut choisir $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$ pour obtenir $A^0 = I_2$, et si l'on suppose la formule vraie au rang n , alors $A^{n+1} = A \times A^n = A(a_n A + b_n I_2) = a_n A^2 + b_n A = a_n(3A + 10I_2) + b_n A = (3a_n + b_n)A + 10a_n I_2$, ce qui prouve l'hérédité en posant $a_{n+1} = 3a_n + b_n$ et $b_{n+1} = 10a_n$.
- On pose $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, et on calcule $AM = \begin{pmatrix} 4x+2z & 4y+2t \\ 3x-z & 3y-t \end{pmatrix}$, et $MA = \begin{pmatrix} 4x+3y & 2x-y \\ 4z+3t & 2z-t \end{pmatrix}$. On en déduit le système suivant (on a tout passé à gauche dans chaque équation) :
$$\begin{cases} 3y - 2z = 0 \\ 2x - 5y - 2t = 0 \\ -3x - 5z + 3t = 0 \\ -3y + 2z = 0 \end{cases}$$
. Les deux équations extrêmes sont manifestement équivalentes : $z = \frac{3}{2}y$. Si on remplace dans la troisième équation, on trouve alors $-3x + \frac{15}{2}z + 3t = 0$, ce qui est la même équation que la deuxième à un facteur $-\frac{3}{2}$ près. On peut donc simplement exprimer une deuxième inconnue en fonction des autres, par exemple $t = x - \frac{5}{2}y$. Les matrices solutions sont de la forme $\begin{pmatrix} x & y \\ \frac{3}{2}y & x - \frac{5}{2}y \end{pmatrix}$, soit $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}\right)$. Les deux matrices de la famille obtenues ne sont pas proportionnelles, donc forment une base de F , et $\dim(F) = 2$.
- La famille proposée n'est sûrement pas libre puisqu'on sait déjà que $A^2 = 3A + 10I_2$. D'ailleurs, A^3 aussi est combinaison linéaire de A et de I_2 (question 2), donc $\text{Vect}(I_2, A, A^2, A^3) = \text{Vect}(I_2, A)$. Les deux matrices restantes n'étant pas proportionnelles, elles forment une base de notre espace, qui est donc de dimension 2.
- (a) Puisque l'identité vaut A^0 on a $I_2 \in G$ et $A = A^1 \in G$, donc $\text{Vect}(I_2, A) \subset G$. Mais d'après la question 2, toutes les puissances de A sont combinaisons linéaires de I_2 et de A , donc appartiennent à $\text{Vect}(I_2, A)$. C'est donc aussi le cas de toute matrice de la forme $P(A)$ qui est une simple combinaison linéaire des précédentes, ce qui prouve l'inclusion réciproque $G \subset \text{Vect}(I_2, A)$, et donc l'égalité entre ces deux espaces.
(b) Une combinaison linéaire de I_2 et de A commute nécessairement avec A , donc $G \subset F$. Comme ces deux espaces sont de dimension 2, ils sont donc nécessairement égaux.
- Si on reprend la forme obtenue pour les matrices de l'ensemble F , elles appartiennent également à H si et seulement si $x + x - \frac{5}{2}y = 0$, soit $x = \frac{5}{4}y$. Autrement dit, $F \cap H = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{5}{4}y & y \\ \frac{3}{2}y & -\frac{5}{4}y \end{pmatrix} \middle| y \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}\right)$ (on a tout multiplié par 4 pour éviter les fractions).
- Le calcul précédent montre que $\dim(F \cap H) = 1$. Or, $\dim(F) = 2$, et $\dim(H) = 3$ (si on n'en est pas convaincu, on écrit une base de H facilement), donc la formule de Grassmann donne $\dim(F + H) = 2 + 3 - 1 = 4$, ce qui prouve que $F + H = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 4 : Étude de deux applications

On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. On définit les deux applications suivantes

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & \frac{1}{2} \left[P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right) \right] \end{array} \quad \text{et} \quad \varphi: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & P(1) \end{array}$$

1. Comme $\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$ on a $\deg\left(P\left(\frac{X}{2}\right)\right) = \deg\left(P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right) = \deg(P) \leq 2$ et enfin, le degré d'une somme de polynômes étant inférieur au degré maximal, on a bien pour tout polynôme P de degré inférieur à 2 : $\deg(f(P)) \leq 2$. De plus, pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}_2[X]^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$f(\lambda P + Q) = \frac{1}{2} \left[(\lambda P + Q)\left(\frac{X}{2}\right) + (\lambda P + Q)\left(\frac{X+1}{2}\right) \right]$$

donc

$$f(\lambda P + Q) = \frac{1}{2} \left[\lambda P\left(\frac{X}{2}\right) + Q\left(\frac{X}{2}\right) + \lambda P\left(\frac{X+1}{2}\right) + Q\left(\frac{X+1}{2}\right) \right] = \lambda f(P) + f(Q)$$

2. On a $f(1) = \frac{1}{2}(1+1) = 1$

$$f(X) = \frac{1}{2}\left(\frac{X}{2} + \frac{X+1}{2}\right) = \frac{2X+1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}X$$

$$f(X^2) = \frac{1}{2}\left[\frac{X^2}{4} + \frac{X^2+2X+1}{4}\right] = \frac{2X^2+2X+1}{8} = \frac{1}{8} + \frac{1}{4}X + \frac{1}{4}X^2$$

On a donc $Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

3. Comme sa matrice est triangulaire supérieure avec tous les coefficients diagonaux qui sont non-nuls, la matrice de f est inversible : elle appartient à $GL_3(\mathbb{R})$. Ainsi, l'application linéaire f est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ (i.e. il appartient à $GL(\mathbb{R}_2[X])$) : f est donc à la fois injective et surjective.

4. Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$ alors

$$P \in \ker(\varphi) \Leftrightarrow \varphi(P) = 0 \Leftrightarrow a + b + c = 0 \Leftrightarrow a = -b - c$$

Donc $\ker(\varphi) = \{(-b-c)X^2 + bX + c, (b, c) \in \mathbb{R}^2\} = \{b(-X^2 + X) + c(-X^2 + 1), (b, c) \in \mathbb{R}^2\} = \text{vect}(-X^2 + X, -X^2 + 1)$. La famille $(-X^2 + X, -X^2 + 1)$ est donc génératrice de $\ker(\varphi)$ et comme ces deux polynômes ne sont pas proportionnels, on obtient que la dimension de $\ker(\varphi)$ vaut 2, et que la famille $(-X^2 + X, -X^2 + 1)$ en est une base.

5. φ n'est pas injective car on noyau n'est pas restreint à $\{0_{\mathbb{R}[X]}\}$ par exemple $-X^2 + 1 \in \ker(\varphi)$.

D'après le théorème du rang, on a $\text{rg}(\varphi) + \dim(\ker(\varphi)) = \dim(\mathbb{R}_2[X])$ i.e. $\dim(\text{Im}(\varphi)) + 2 = 3$ donc $\text{Im}(\varphi)$ est de dimension 1 : mais comme cette image est incluse dans $\mathbb{R}$, on obtient que l'image de φ est exactement $\mathbb{R}$: φ est donc surjective (en fait, il s'agit d'une forme linéaire non nulle).

Exercice 5

On considère l'application $f: \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto (4x - y - 2z, -x + 2z, 5x - y - 3z) \end{cases}$.

1. On a : $f(\lambda(x, y, z) + \mu(x', y', z')) = f(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z')$

$$= (4\lambda x + 4\mu x' - \lambda y - \mu y' - 2\lambda z - 2\mu z', -\lambda x - \mu x' + 2\lambda z + 2\mu z', 5\lambda x + 5\mu x' - \lambda y - \mu y' - 3\lambda z - 3\mu z') = \lambda(4x - y - 2z, -x + 2z, 5x - y - 3z) + \mu(4x' - y' - 2z', -x' + 2z', 5x' - y' - 3z')$$

$$= \lambda f(x, y, z) + \mu f(x', y', z'). \text{ L'application } f \text{ est bien une application linéaire.}$$

2. On a : $f - id$ est une application linéaire, donc $(f - id)(0) = 0$. Si $u \in \ker(f - id)$, on a $(f - id)(u) = 0$, donc $(f - id)^2(u) = (f - id)(0) = 0$, ce qui prouve que $u \in \ker((f - id)^2)$.

3. On veut donc trouver les vecteurs u vérifiant $f(u) - u = 0$, ce qui revient à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 3x - y - 2z = 0 \\ -x - y + 2z = 0 \\ 5x - y - 4z = 0 \end{cases} \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 - L_2 \text{ et } L_3 \rightarrow L_3 - L_2} \begin{cases} 4x - 4z = 0 \\ -x - y + 2z = 0 \\ 6x - 6z = 0 \end{cases}$$

Les lignes 1 et 3 sont manifestement équivalentes et imposent $x = z$, puis la deuxième donne $y = 2z - x = x$, donc $\ker(f - id) = \text{Vect}((1, 1, 1))$. En particulier, $\dim(\ker(f - id)) = 1$.

4. On calcule d'abord $(f - id)(x, y, z) = (3x - y - 2z, -x - y + 2z, 5x - y - 4z)$. En posant $X = 3x - y - 2z, Y = -x - y + 2z$ et $Z = 5x - y - 4z$, on a donc $(f - id)^2(x, y, z) = (3X - Y - 2Z, -X - Y + 2Z, 5X - Y - 4Z) = (9x - 3y - 6z + x + y - 2z - 10x + 2y + 8z, -3x + y + 2z + x + y - 2z + 10x - 2y - 8z, 15x - 5y - 10z + x + y - 2z - 20x + 4y + 16z) = (0, 8x - 8z, -4x + 4z)$.

5. Je ne vais même pas m'embêter à écrire le système à résoudre cette fois-ci tant il est trivial : la seule condition restante est $z = x$, donc $\ker((f - id)^2) = \{(x, y, x) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}((1, 0, 1), (0, 1, 0))$. En particulier, ce nouveau noyau est bien sûr de dimension 2 puisque les deux vecteurs obtenus ne sont pas proportionnels et forment donc une base de $\ker((f - id)^2)$. On peut sans problème remplacer le premier de ces deux vecteurs par leur somme pour obtenir $\ker((f - id)^2) = \text{Vect}((1, 1, 1), (0, 1, 0))$, et on a alors la forme demandée par l'énoncé, avec $e_1 = (1, 1, 1) \in \ker(f - id)$ et $e_2 = (0, 1, 0) \notin \ker(f - id)$.

6. On veut désormais avoir $f(u) + u = 0$, ce qui donne le nouveau système $\begin{cases} 5x - y - 2z = 0 \\ -x + y + 2z = 0 \\ 5x - y - 2z = 0 \end{cases}$. La dernière équation est manifestement redondante, on effectue alors l'unique opération $L_1 \rightarrow L_1 + L_2$ pour obtenir $4x = 0$, donc $x = 0$. La seule équation restante impose alors $y + 2z = 0$, donc $y = -2z$, et $\ker(f + id) = \text{Vect}((0, -2, 1))$. En particulier, $\dim(\ker(f + id)) = 1$, et (en anticipant la question suivante), le vecteur $e_3 = (0, -2, 1)$ est une base de ce noyau.

7. Si on suppose $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0$, alors l'équation obtenue pour la première coordonnée impose déjà $\lambda_1 = 0$. Les deux vecteurs restants n'étant pas proportionnels, on aura aussi $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, donc la famille est libre. Comme il s'agit d'une famille de trois vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 3, c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

8. On souhaite écrire $u = (x, y, z) = a(1, 1, 1) + b(0, 1, 0) + c(0, -2, 1)$, ce qui nous mène à résoudre le système suivant :
- $$\begin{cases} a = x \\ a + b - 2c = y \\ a + c = z \end{cases}$$
- Le système étant déjà triangulaire, il se résout tout seul $a = x, c = z - a = z - x$ et $b = y - a + 2c = y - x + 2z - 2x = -3x + y + 2z$. Finalement, $u = (x, -3x + y + 2z, z - x)_{(e_1, e_2, e_3)}$.

9. Par définition, $e_1 \in \ker(f - id)$, donc $f(e_1) = e_1$. Une récurrence triviale (est-ce même vraiment nécessaire de le préciser ?) permet d'en déduire que $f^n(e_1) = e_1 = (1, 1, 1)$. De même, $e_3 \in \ker(f + id)$, donc $f(e_3) = -e_3$, et on en déduit immédiatement que $f^n(e_3) = (-1)^n e_3 = (0, 2(-1)^{n+1}, (-1)^n)$.

10. Comme $f - id$ et id commutent, il s'agit du binôme de Newton appliqué à l'égalité $f = (f - id) + id$ (bien sûr, les «puissances» de l'application identité sont égales à id et disparaissent de l'expression finale). Comme $e_2 \in \ker((f - id)^2)$, on aura bien sûr $(f - id)^2(e_2) = 0$ mais aussi $(f - id)^k(e_2) = 0$ pour tout entier $k \geq 2$. Si on applique la formule obtenue par Newton au vecteur e_2 , on a donc $f^n(e_2) = \sum_{k=0}^1 \binom{n}{k} (f - id)^k(e_2) = e_2 + n(f - id)(e_2) = nf(e_2) - (n - 1)e_2$. Comme $f(e_2) = f(0, 1, 0) = (-1, 0, -1)$, on a

$$f^n(e_2) = (-n, 1 - n, -n).$$

11. En combinant les résultats des trois dernières questions,

$$\begin{aligned} f^n(x, y, z) &= f^n(xe_1 + (-3x + y + 2z)e_2 + (z - x)e_3) = x(1, 1, 1) + (-3x + y + 2z)(-n, 1 - n, -n) + (z - x)(0, 2(-1)^{n+1}, (-1)^n) \\ &= (x + 3nx - ny - 2nz, x + (3n - 3)x + (1 - n)y = (2 - 2n)z + 2(-1)^{n+1}z + 2(-1)^n x, x + 3nx - ny - 2nz + (-1)^n z + (-1)^{n+1} x) \\ &= ((3n + 1)x - ny - 2nz, (3n - 2 + 2(-1)^n)x + (1 - n)y + (2 - 2n + (-1)^{n+1})z, (3n + 1 + (-1)^{n+1})x - ny + ((-1)^n - 2n)z). \end{aligned}$$

Exercice 6

(Exercice 99 de la banque CCINP)

1. Soit $a \in]0, +\infty[$. l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev nous donne

$$P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}.$$

2. On pose $X = \frac{S_n}{n}$.

Par linéarité de l'espérance et comme toutes les variables Y_i ont la même espérance, on a $E(X) = E(Y_1)$.

De plus, comme les variables sont indépendantes, on a $V(X) = \frac{1}{n^2}V(S_n) = \frac{1}{n}V(Y_1)$.

Alors, en appliquant 1. à X , on obtient le résultat souhaité.

3. $\forall i \in \mathbb{N}^*$, on considère la variable aléatoire Y_i valant 1 si la $i^{\text{ème}}$ boule tirée est rouge et 0 sinon.

Y_i suit une loi de Bernoulli de paramètre p avec $p = \frac{2}{5} = 0,4$.

Les variables Y_i suivent la même loi, sont indépendantes et $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $Y_i \in L^2$.

On a d'après le cours, $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $E(Y_i) = 0,4$ et $V(Y_i) = 0,4(1-0,4) = 0,24$.

On pose $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$. S_n représente le nombre de boules rouges obtenues au cours de n tirages.

Alors $T_n = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n}$ représente la proportion de boules rouges obtenues au cours de n tirages.

On cherche à partir de combien de tirages on a $P(0,35 \leq T_n \leq 0,45) > 0,95$.

$$\begin{aligned} \text{Or } P(0,35 \leq T_n \leq 0,45) &= P\left(0,35 \leq \frac{S_n}{n} \leq 0,45\right) = P\left(-0,05 \leq \frac{S_n}{n} - E(Y_1) \leq 0,05\right) \\ &= P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \leq 0,05\right) = 1 - P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| > 0,05\right). \end{aligned}$$

$$\text{On a donc } P(0,35 \leq T_n \leq 0,45) = 1 - P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| > 0,05\right).$$

$$\text{Or, d'après la question précédente, } P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geq 0,05\right) \leq \frac{0,24}{n(0,05)^2}.$$

$$\text{Donc } P(0,35 \leq T_n \leq 0,45) \geq 1 - \frac{0,24}{n(0,05)^2}.$$

Il suffit alors pour répondre au problème de chercher à partir de quel rang n , on a $1 - \frac{0,24}{n(0,05)^2} \geq 0,95$.

La résolution de cette inéquation donne $n \geq \frac{0,24}{0,05^3}$ c'est-à-dire $n \geq 1920$.