

Exercice 6

1. $E = \mathbb{R}^3$: $\vec{x}_1(2, -3, 4)$, $\vec{x}_2(1, -1, 0)$, $\vec{x}_3(1, 0, 1)$ et $\vec{x}_4(-1, 2, -1)$

Vérifions si elle est libre.

Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, on a :

$$\begin{cases} 2a + b + c - d = 0 \\ -3a - b + 2d = 0 \\ 4a + c - d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} l_2 \leftarrow 2l_2 + 3l_1 \\ l_3 \leftarrow l_3 - 2l_1 \end{matrix} \begin{cases} 2a + b + c - d = 0 \\ b + 3c + d = 0 \\ -2b - c + d = 0 \end{cases} \checkmark$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} l_3 \leftarrow l_3 + 2l_2 \end{matrix} \begin{cases} 2a + b + c - d = 0 \\ b + 3c + d = 0 \\ 5c + d = 0 \end{cases} \checkmark$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b + c = d \\ b + 3c = -d \\ 5c = -d \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b + c = d \\ b = -d - 3c = -d + \frac{3d}{5} = -\frac{2d}{5} \\ c = -\frac{d}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = (d - b - c) \times \frac{1}{2} = \frac{4}{5}d \\ b = -\frac{2d}{5} \\ c = -\frac{d}{5} \end{cases}$$

En prenant $d = 5$, on obtient $c = -1$, $b = -2$ et $a = 4$

On a : $4\vec{x}_1 - 2\vec{x}_2 - \vec{x}_3 + 5\vec{x}_4 = (0, 0, 0, \cancel{0})$ donc $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4)$ est liée $\checkmark$

Comme $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4)$ est liée, elle n'est pas une base (Autre méthode plus directe : comme $\mathbb{R}^3$ est de dimension $3 < 4$,

toute famille de 4 vecteurs est obligatoirement liée)

Vérifions si elle est génératrice.

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tq $\lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + \lambda_3\vec{x}_3 + \lambda_4\vec{x}_4 = (x, y, z)$ ①

Tq $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow \lambda_1(2, -3, 4) + \lambda_2(1, -1, 0) + \lambda_3(1, 0, 1) + \lambda_4(-1, 2, -1) = (x, y, z)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 = x \\ -3\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_4 = y \\ 4\lambda_1 + \lambda_3 - \lambda_4 = z \end{cases}$$

on prend $\lambda_4 = 0$

Cela revient donc à prouver que $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ est génératrice (on peut se passer de $\vec{x}_4$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = x \\ -3\lambda_1 - \lambda_2 = y \\ 4\lambda_1 + \lambda_3 = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = x \\ \lambda_2 + 3\lambda_3 = 2y + 3x \\ -2\lambda_2 - \lambda_3 = z - 2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = x \\ \lambda_2 + 3\lambda_3 = 2y + 3x \\ 5\lambda_3 = z - 2x + 2(2y + 3x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = x \\ \lambda_2 + 3\lambda_3 = 2y + 3x \\ 5\lambda_3 = z + 4x + 4y \end{cases}$$

À partir d'ici, on peut conclure qu'il y a une solution car le système est triangulaire à coeffs. diagonaux tous $\neq 0$ (il n'est pas nécessaire d'avoir l'expression exacte de la solution)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = x \\ \lambda_2 + 3\lambda_3 = 2y + 3x \\ \lambda_3 = \frac{4}{5}x + \frac{4}{5}y + \frac{z}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = x \\ \lambda_2 = 2y + 3x - 3\lambda_3 = 2y + 3x - \frac{12}{5}x - \frac{12}{5}y - \frac{3}{5}z = \frac{3}{5}x - \frac{2}{5}y - \frac{3}{5}z \\ \lambda_3 = \frac{4}{5}x + \frac{4}{5}y + \frac{z}{5} \end{cases}$$

$$\text{donc } \lambda_1 = \frac{-x - y - z}{5}$$

$$\lambda_2 = \frac{3x - 2y - 3z}{5}$$

$$\lambda_3 = \frac{4x + 4y + z}{5}$$

$$\text{donc } \text{vect}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4) = \mathbb{R}^3 \quad \checkmark$$

$$\text{donc } (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4) \text{ est génératrice de } \mathbb{R}^3$$

2. $E = \mathbb{R}_3[X] : P_1 = X^3 - 1; P_2 = X^3 + 2X^2 - 3X + 1$ et $P_3 = X^3 + 7X - 1$

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ alors: $a(X^3 - 1) + b(X^3 + 2X^2 - 3X + 1) + c(X^3 + 7X - 1) = 0_{\mathbb{R}_3[X]}$

$$aX^3 - a + bX^3 + b2X^2 - b3X + b + cX^3 + c7X - c = 0_{\mathbb{R}_3[X]}$$

$$X^3(a + b + c) + X^2 \times 2b + X(-3b + 7c) + (-a + b - c) = 0_{\mathbb{R}_3[X]}$$

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 2b = 0 \\ -3b + 7c = 0 \\ -a - b - c = 0 \end{cases} \quad a = b = c = 0 \quad \text{donc } \underline{\text{la famille est libre}} \quad \checkmark$$

Si la famille était génératrice, on aurait $\dim(\mathbb{R}_3[X]) \leq \dim(\mathbb{R}^3) = 3$ car (P_1, P_2, P_3) serait une famille génératrice formée de 3 polynômes.

or $\dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4$ et $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ donc absurde donc la famille n'est pas génératrice

donc n'est pas une base $\checkmark$