



Ex 16

Soit E un K -ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Montrons que:

$$\ker(u) = \text{Im}(u) \iff u^2 = 0_{\mathcal{L}(E)} \text{ et } \dim(E) = 2 \text{rg}(u)$$

$$u: \begin{cases} E \rightarrow E \\ \vec{x} \mapsto u(\vec{x}) = 0_{\mathcal{L}(E)} \end{cases} \text{ donc}$$

$\Rightarrow$ On a $\vec{x} \in E / u(\vec{x}) \in \text{Im}(u) \iff u(\vec{x}) \in \ker(u)$

Alors on a:

$$(i) u \circ u(\vec{x}) = 0_{\mathcal{L}(E)} \text{ donc } u^2 = 0_{\mathcal{L}(E)} \checkmark$$

et comme u est un endomorphisme de E .

D'après le théorème du rang.

(ii) Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ alors

$$\dim(E) = \dim(\text{Im}(v)) + \dim(\ker(v))$$

$$\text{or } \dim(\text{Im}(f)) = \text{rg}(f)$$

$$\dim(E) = 2 \dim(\text{Im}(f)) = 2 \text{rg}(f)$$

Remplacer "f" par "u"

$$\Leftarrow u \circ u = 0_{\mathcal{L}(E)} \text{ et } \dim(E) = 2 \text{rg}(u)$$

(ii) après le Thm du rang

$$\dim(E) = \text{rg}(u) + \dim(\ker(u)) = 2 \text{rg}(u)$$

$$\text{donc } \iff \dim(\ker(u)) = \text{rg}(u)$$

$$\text{i.e. } \iff \dim(\ker(u)) = \dim(\text{Im}(u))$$

$$\ker(u) = \text{Im}(u)$$

$$(i) u \circ u(\vec{x}) = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

$$\text{Alors } \vec{x} \in \ker(u) \subset \text{Im}(f)$$

Une égalité de dimension ne suffit pas à expliquer que 2 sous-ev sont égaux. Il faut prouver une inclusion + dimensions égales.

Par exemple ici, comme $u^2 = 0_{\mathcal{L}(E)} \iff \forall \vec{y} \in \text{Im}(u), \exists \vec{x} \in E / u(\vec{x}) = \vec{y}$
 donc $u(\vec{y}) = u^2(\vec{x}) = 0_E$
 i.e. $\text{Im}(u) \subset \ker(u)$