

Ex 8

Ex 8 Soit X la variable aléatoire dont la loi est définie par le tableau suivant

x_i	-1	0	1
$P(X=x_i)$	$1/3$	$1/3$	$1/3$

- Déterminer la loi du couple $V = (X, X^2)$.
- Calculer la covariance des variables X et X^2 . Que peut-on en déduire ? On s'aperçoit que la covariance peut être nulle même lorsque les variables ne sont pas indépendantes.

1) Loi de X :

x_i	-1	0	1
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Loi de X^2 :

x_i^2	1	0
$P(X=x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

On a : $V = (X, X^2)$

Loi de V

$X \backslash X^2$	0	1
-1	0	$1/3$
0	$1/3$	0
1	0	$1/3$

$$\begin{aligned} 2) \text{Cov}(X, X^2) &= E(X \cdot X^2) - E(X)E(X^2) \\ &= E(X^3) - E(X)E(X^2) \end{aligned}$$

$$\bullet E(X) = -1 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} = 0$$

$$\bullet E(X^2) = 1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\bullet E(X^3) = -1 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} = 0$$

$$\boxed{\text{Cov}(X, X^2) = 0 - 0 \times \frac{2}{3} = 0}$$

→ Expliquez que X et X^2 ne sont pas indépendantes :

par exemple

$$P(X=0, X^2=1) = 0 \neq \underbrace{P(X=0)}_{=1/3} \times \underbrace{P(X^2=1)}_{=2/3}$$

Ex 7

Ex 7 On considère un dé cubique truqué de telle que sorte la probabilité d'obtenir la valeur $k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$ soit proportionnelle à k . Soit X la v.a.r. associée au lancer de ce dé.

1. Déterminer la loi de X et calculer $E(X)$. Soit λ ce facteur de proportionnalité. Alors pour tout k ; $P(X = k) = \lambda k$ mais par ailleurs $\sum P(X = k) = 1$ donc on en déduit la seule valeur possible pour k .
2. On pose $Y = \frac{1}{X}$. Déterminer la loi de Y et $E(Y)$.

1) On a: $\forall k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket, P(X = k) = \lambda k, \lambda \in \mathbb{R}$

De plus, on a: $\sum_{k=1}^6 P(X = k) = 1$

Donc $\sum_{k=1}^6 \lambda k = 1$

i.e $\lambda \frac{6(6+1)}{2} = 1$ ✓

donc $\lambda = \frac{1}{21}$ ✓

loi de X :

k	1	2	3	4	5	6
$P(X=k)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$

 ✓

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^6 k P(X=k) = \frac{1}{21} \sum_{k=1}^6 k^2 \\ &= \frac{1}{21} \frac{6(7)(13)}{6} = \frac{91}{21} = \frac{13}{3} \end{aligned} \quad \checkmark$$

2) On définit $f: \begin{cases} \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x} \end{cases}$

Donc loi de Y :

y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$
$P(X=y)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$

 ✓

$$E(Y) = \frac{1}{21} \times 6 = \frac{2}{7} \quad \checkmark$$

Ex 6

Ex 6 On lance simultanément deux dés dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On appelle Z la variable aléatoire égale à la valeur absolue de la différence des numéros obtenus. Déterminer la loi de probabilité de Z , son espérance et variance.

Soient X_1, X_2 les 2 v.a.r associées aux 2 lancers de dé

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

loi de X_1 (idem pour X_2)

le nombre de couples possibles est $6^2 = 36$

les valeurs possibles de z sont $\llbracket 0, 5 \rrbracket$

$$P(Z=0) = P(\{2,1\}, \{1,2\}, \{3,2\}, \{2,3\}, \{4,3\}, \{3,4\}, \{5,4\}, \{4,5\}, \{6,5\}, \{5,6\}, \{6,6\}) = \frac{6}{36} \checkmark$$

$$P(Z=1) = P(\{2,1\}, \{1,2\}, \{3,2\}, \{2,3\}, \{4,3\}, \{3,4\}, \{5,4\}, \{4,5\}, \{6,5\}, \{5,6\}) = \frac{10}{36} \checkmark$$

$$P(Z=2) = P(\{4,3\}, \{3,4\}, \{5,4\}, \{4,5\}, \{6,5\}, \{5,6\}, \{3,2\}, \{2,3\}, \{4,3\}, \{3,4\}) = \frac{8}{36}$$

$$P(Z=3) = P(\{5,4\}, \{4,5\}, \{6,5\}, \{5,6\}, \{3,2\}, \{2,3\}, \{4,3\}, \{3,4\}) = \frac{6}{36} \checkmark$$

$$P(Z=4) = P(\{6,5\}, \{5,6\}, \{3,2\}, \{2,3\}) = \frac{4}{36} \checkmark$$

$$P(Z=5) = P(\{6,1\}, \{1,6\}) = \frac{2}{36} \checkmark$$

Pour être plus concis:

Si $k \in \llbracket 1, 5 \rrbracket$

$$P(Z=k) = P\left(\bigcup_{i=1}^{6-k} \{(i, i+k)\} \cup \bigcup_{i=1}^{6-k} \{(i+k, i)\}\right) = 2 \times (6-k) \times \frac{1}{36} = \frac{12-2k}{36} \checkmark$$

z	0	1	2	3	4	5
$P(Z=z)$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$

$$E(Z) = \frac{10+16+18+16+10}{36} = \frac{70}{36} = \frac{35}{18} \checkmark$$

$$V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2$$

$$= \frac{10+32+54+64+50}{36} - \left(\frac{35}{18}\right)^2 \checkmark$$

$$= \frac{210 \times 3}{36 \times 3} - \frac{1225}{324} = \frac{1890 - 1225}{324}$$

$$= \frac{665}{324} \checkmark$$

Très bien.

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 35 \\ \hline 175 \\ 1050 \\ \hline 1225 \end{array} \quad \begin{array}{r} 6 \\ \times 18 \\ \hline 1724 \\ 180 \\ \hline 324 \end{array}$$