

Exercice 7:

1) $M_q(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, comme $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n+1$ et $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est constituée de $n+1$ polynômes montrons seulement que $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est libre: ✓

Soit $(a_i)_{0 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^{n+1} / \sum_{i=0}^n a_i P_i = 0_{\mathbb{K}[X]}$

On suppose qu'il y a au moins un $i / a_i \neq 0$, on prend le plus grand de ces i et on le note j .

Ainsi $\forall i > j, a_i P_i = 0_{\mathbb{K}[X]}$ ainsi $\sum_{i=0}^j a_i P_i = 0_{\mathbb{K}[X]}$ ✓

On a $\text{Cd}(\sum_{i=0}^j a_i P_i) = a_j \text{Cd}(P_j)$ car $\deg(P_j) = j$ et $\forall i < j, \deg(P_i) < j$ ✓

Comme $\sum_{i=0}^j a_i P_i = 0_{\mathbb{K}[X]}$ on a donc $a_j \text{Cd}(P_j) = 0$ et comme $a_j \neq 0$ on a $\text{Cd}(P_j) = 0$ ✓

Ce qui est ABSURDE car sinon $\deg(P_j) < j$ ✓

Ainsi $\forall i \in [0, n], a_i = 0_{\mathbb{K}}$ donc $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est libre ✓

Donc $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ ✓

2) $(X-1)^k_{0 \leq k \leq n}$ est une famille de polynômes échelonnés donc d'après la question précédente c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

On a $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], P(X) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(1)}{k!} (X-1)^k$

Donc le $k^{\text{ème}}$ coefficient de P dans cette base est $\frac{P^{(k)}(1)}{k!}$ ✓

Dans le thm, ce n'est pas n mais $+\infty$.

Mais comme $\deg(P) \leq n$ on a $P^{(k)} = 0_{\mathbb{R}[X]}$ dès que $k > n$.

Exercice 14.

1) Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - z = 0\}$ donc soit $(x, y, z) \in F$ on a $x + y - z = 0$

Donc $(x, y, z) = y(1, 1, 0) + z(-1, 0, 1)$

donc $x = y - z$

Erreur de signe $x = z - y$

Donc $F = \text{vect}((1, 1, 0), (-1, 0, 1))$

$M_q F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ Soit $\vec{x} \in F \cap G$ alors $\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 /$

$\vec{x} = a(1, 1, 0) + b(-1, 0, 1) = c(1, 1, 1)$

Donc $(a-b-c, a-c, b-c) = (0, 0, 0) \iff \begin{cases} a-b-c = 0 \\ a-c = 0 \\ b-c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a-b-c = 0 \\ b = 0 \\ b-c = 0 \end{cases}$

On peut directement dire $\vec{x} = (a, c, c)$ vérifie l'équation car $c+c-c=0$ donc $c=0$

$$\begin{aligned} &\iff l_3 \rightarrow l_3 - l_1 \\ &\begin{cases} a - b - c = 0 \\ b = 0 \\ -c = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ce système est de Cramer donc admet une unique solution : $(a, b, c) = (0, 0, 0)$

Ainsi $\overline{x} = 0_{\mathbb{R}^3}$ donc $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

On a maintenant $F \oplus G = \text{vect}((1, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, 1, 1))$

On a $\dim(F \oplus G) = 3$ et $F \oplus G$ un sous-ev de $\mathbb{R}^3$, or $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ ainsi $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$

$$\begin{aligned} &\overset{11}{\underbrace{\dim(F) + \dim(G)}} \\ &\underset{2}{=} 1 \end{aligned}$$