

TD 22 : Espaces vectoriels de dimension finie

Familles libres, familles génératrices, bases

Ex 1 Pour tout $x \in]-1, 1[$, on définit les fonctions f et g par : $f(x) = \frac{1}{x-1}$ et $g(x) = \frac{1}{x+1}$

1. Montrer que (f, g) est une famille libre de $\mathcal{F}([-1, 1[, \mathbb{R})$. Supposer que $\forall x \in]-1, 1[, \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} = 0$ et évaluer en certains points pour obtenir finalement $a = b = 0$
2. Montrer que $x \mapsto \frac{2}{x^2 - 1} \in \text{vect}(f, g)$. Décomposer en éléments simples pour écrire cette fonction comme combinaison linéaire des deux premières

Ex 2 Montrer que les familles de fonctions suivantes sont des familles libres de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. $(x \mapsto e^{a_k x})_{1 \leq k \leq n}$ avec (a_k) une suite strictement croissante. Supposer qu'il existe $(a_1, \dots, a_n)$ tous nuls tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on ait $\sum a_k e^{a_k x} = 0$. Multiplier alors par $e^{a_{k_0} x}$ où k_0 est le plus grand indice k vérifiant $a_k \neq 0$, et étudier la limite
2. $(x \mapsto \sin(kx))_{1 \leq k \leq n}$. Supposer que $\sum a_k \sin(kx) = 0$ pour tout x , multiplier par $\sin(k_0 x)$ et intégrer entre 0 et 2π : on en déduit la valeur de a_{k_0}
3. $(x \mapsto |x - \lambda|)_{\lambda \in \mathbb{R}}$. Si $x \mapsto \sum a_k |x - \lambda_k|$ est la fonction identiquement nulle, on peut montrer que pour tout k , la fonction $x \mapsto a_k |x - \lambda_k|$ est continue en λ_k ce qui permet de conclure

Ex 3 Montrer que $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \text{ et } 2x - y + 3z = 0\}$ est un sous- $\mathbb{R}$ -ev de $\mathbb{R}^3$.

Considérer deux vecteurs $u = (x, y, z)$ et $v = (x', y', z')$ vérifiant ces deux égalités et $\lambda \in \mathbb{R}$, montrer que $\lambda u + v \in F$. Interpréter géométriquement. Résoudre le système, caractériser les vecteurs de F à l'aide d'un seul paramètre : observer que tous ses vecteurs sont colinéaires. Donner une base de F .

Ex 4 Les vecteurs $\vec{u}(0, 1, 1)$, $\vec{v}(1, 0, 1)$ et $\vec{w}(1, 1, 0)$ forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$ en tant que $\mathbb{R}$ -ev ? Comme cette famille est formée de 3 vecteurs et que $3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ il suffit de montrer que cette famille est libre. Supposer donc que $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$ résoudre un système pour en déduire $a = b = c = 0$

Ex 5 On appelle E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto a \operatorname{sh}(x) + b \operatorname{ch}(x) + ce^x$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

1. Montrer $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. On montre que c'est un sous-ev de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
2. Déterminer une base de E . On sait que $(\operatorname{sh}, \operatorname{ch}, \exp)$ est une famille génératrice de E , est-elle libre ? Si ce n'est pas le cas, on peut tout de même en extraire une base

Ex 6 Parmi les familles de vecteurs suivantes indiquer celles qui sont libres, celles qui sont génératrices et celles qui sont des bases de E .

1. $E = \mathbb{R}^3$: $\vec{x}_1(2, -3, 4)$, $\vec{x}_2(1, -1, 0)$, $\vec{x}_3(1, 0, 1)$ et $\vec{x}_4(-1, 2, -1)$. Libre : argument avec le nombre de vecteurs et la dimension. Génératrice : on peut par exemple trouver une sous-famille de 3 vecteurs qui est une base de $\mathbb{R}^3$
2. $E = \mathbb{R}_3[X]$: $P_1 = X^3 - 1$, $P_2 = X^3 + 2X^2 - 3X + 1$ et $P_3 = X^3 + 7X - 1$. Génératrice : argument avec le nombre de vecteurs et la dimension. Libre : supposer $aP_1 + bP_2 + cP_3 = 0$ et résoudre un système.

Ex 7 Famille de polynômes

1. Polynômes échelonnés

Soit $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ une suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ telle que $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\deg(P_k) = k$. Montrer que $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Nombre d'éléments de la famille : $n+1$, qui correspond à la dimension. Il suffit donc de montrer que la famille est libre : supposer que $a_0 P_0 + \dots + a_n P_n = 0$, puis en déduire progressivement que $a_n = 0$, puis $a_{n-1} = 0$ etc.

2. Formule de Taylor

Montrer que $((X-1)^k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ puis exprimer les coefficients de P dans cette nouvelle base. $n+1$ éléments : il suffit de montrer que la famille est génératrice. Considérer $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et montrer qu'il existe des coefficients tels que $P = \sum_{k=0}^n \alpha_k (X-1)^k$

Calculs de dimensions

Ex 8 Soient F et G deux sous- $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de E tels que : $\dim(F) + \dim(G) > \dim(E)$.

Prouver que $F \cap G \neq \{\vec{0}_E\}$. Utiliser la formule de Grassman

Ex 9 Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels et déterminer leur dimension :

- $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\}$ Tous vecteur de cet ensemble peut s'écrire à l'aide de deux paramètres, i.e. sous la forme $a\vec{u} + b\vec{v}$, on en déduit que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de de cet ensemble
- $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2y = 3z\}$ Ici, un seul paramètre suffit : cet ensemble est donc une droite
- $\{P \in \mathbb{R}_4[X] \mid P(1) = 0\}$ On pourra trouver une famille libre de 4 polynômes échelonnée en degré. Par ailleurs, cet ensemble n'est pas de dimension 5 (à justifier)
- L'ensemble des fonctions dont la dérivée seconde est nulle. On en trouvera une base faisant intervenir deux fonctions
- L'ensemble des solutions de l'équation différentielle : $y'' + 4y = 0$ Résoudre l'EDL : toutes solutions se décrit à l'aide de deux paramètres, ce qui fournit une base de l'ensemble
- $\text{vect}(A, A^2, A^3)$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On connaît une famille génératrice, mais est-elle libre ?
- $\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$ Toute matrice de cet ensemble s'écrit sous la forme $aI + bJ + cK$, montrer que (I, J, K) en est une base
- $\Delta = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$. Même principe

Ex 10 Soit W le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $\vec{x}_1 = (1, -2, 5, -3)$, $\vec{x}_2 = (2, 3, 1, -4)$ et $\vec{x}_3 = (3, 8, -3, -5)$. Trouver une base et la dimension de W . La famille $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ est génératrice, si elle est libre, elle convient, sinon, on peut en extraire une base. Compléter la base de W en une base de $\mathbb{R}^4$. Appliquer l'algorithme en considérant la famille libre à compléter, et la base canonique de $\mathbb{R}^4$

Ex 11 On considère les sous-ensembles de $\mathbb{R}^4$:

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 5x + y + z - t = 0\}$$

$$G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - z = 0 \text{ et } x + 3y + 2z + 2t = 0\}$$

- Montrer que F et G sont deux sous- $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$. On précisera pour chacun une base et sa dimension. On peut décrire les vecteurs de F à l'aide de 3 paramètres, ceux de G à l'aide de 2 paramètres. $\dim(F) = 3$ et $\dim(G) = 2$
- Déterminer $F \cap G$. En donner la dimension et une base éventuelle. Déterminer les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ qui satisfont les 3 équations
- Déterminer la dimension de $F + G$. Conclure. Utiliser la formule de Grassman

Applications linéaires en dimension finie

Ex 12 Soient $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $g: \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X]$
 $(x, y, z) \mapsto (x + y - z, 2y - 3z, 2x + z)$ et $P \mapsto P - (X + 1)P'$

Montrer que f et g sont des endomorphismes puis déterminer pour chacun leur noyau et leur image. Pour f , on détermine le noyau,

puis on utilise le théorème du rang, pour en déduire sans calcul son image.

Pour g : déterminer son noyau, vérifier que $\text{Im}(g) \subseteq \mathbb{R}_2[X]$ puis conclure à l'aide du théorème du rang.

Ex 13 On considère $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et on définit l'application linéaire f par :

$$f(\vec{e}_1) = -\sqrt{2}\vec{e}_1 + \vec{e}_3 \quad f(\vec{e}_2) = \sqrt{2}\vec{e}_2 + \vec{e}_3 \quad \text{et} \quad f(\vec{e}_3) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$$

1. Exprimer l'image par f de tout vecteur (x, y, z) dans la base canonique.
2. Déterminer le noyau et l'image de f . Commencer par déterminer le noyau, puis utiliser le théorème du rang pour conclure

Ex 14 Expression analytique d'un projecteur

Soient $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$ et $G = \text{vect}(1, 1, 1)$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$. Montrer que $\dim(F) = 2$, $\dim(G) = 1$, et F et G sont en somme directe
2. Déterminer une expression analytique du projecteur sur F parallèlement à G . Quel est le projeté de $\vec{u}(1, 2, 3)$? L'objectif est de décomposer un vecteur quelconque (x, y, z) sous la forme $(a, b, a + b) + \lambda(1, 1, 1)$. Résoudre ce système (attention, (x, y, z) est fixé, les inconnues sont a, b et λ)
3. En déduire une expression analytique de la symétrie par rapport à F parallèlement à G . On peut utiliser le fait que $s = 2\text{Id} - p$

Ex 15 Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$. Montrer l'inégalité

$$|\text{rg}(f) - \text{rg}(g)| \leq \text{rg}(f + g) \leq \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$$

On montre que $\text{Im}(f + g) \subseteq \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$, puis en appliquant la dimension ainsi que la formule de Grassman, on trouve l'inégalité de droite.

Pour l'inégalité de gauche, en exploitant la symétrie de l'énoncé (quitte à intervertir f et g) il suffit de montrer que $\text{rg}(f) - \text{rg}(g) \leq \text{rg}(f + g)$ i.e que $\text{rg}(f) \leq \text{rg}(f + g) + \text{rg}(g)$. On peut utiliser l'inégalité de droite (qu'on a au préalable démontré) pour justifier cela

Ex 16 Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes

1. $\ker(u) = \text{Im}(u)$
2. $u^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $\dim(E) = 2\text{rg}(u)$

Utiliser le théorème du rang pour $(1) \Rightarrow (2)$

Pour $(2) \Rightarrow (1)$ on montre tout d'abord que $\text{Im}(u) \subseteq \ker(u) = \{0\}$ grâce à la première égalité, puis on utilise la deuxième égalité pour montrer que leurs dimensions sont égales (on utilise encore le théorème du rang)

Ex 17 Soient E un $\mathbb{K}$ -ev et $f \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1. Montrer qu'il existe un scalaire λ tel que $f^2 = \lambda f$. Justifier qu'il existe $\vec{u} \in E$ tel que $\text{Im}(f) = \text{vect}(\vec{u})$ puis qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$ montrer que pour ce même λ on a $f \circ f = \lambda f$

Ex 18 Endomorphisme nilpotent

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme nilpotent d'indice p sur E , c'est-à-dire : $f^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Prouver l'existence d'un vecteur $\vec{u} \in E$ tel que $f^{p-1}(\vec{u}) \neq \vec{0}_E$ et $(\vec{u}, f(\vec{u}), f^2(\vec{u}), \dots, f^{p-1}(\vec{u}))$ est libre dans E .
Considérer $\vec{u}$ tel que $f^{p-1}(\vec{u}) \neq \vec{0}$. Supposer que $\sum_{i=0}^{n-1} a_i f^i(\vec{u}) = \vec{0}$, appliquer f^{p-1} à cette égalité : cela permet d'en déduire $a_0 = 0$. Appliquer ensuite f^{p-2} : on en déduit $a_1 = 0$, et on itère ce procédé
2. En déduire que $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$. La famille libre obtenue dans la première question est formée de p vecteurs et est libre, donc $p \leq n$. Comme $f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$, montrer qu'on a également $0_{\mathcal{L}(E)}$