

FERDYNUS

NIMS

GOULAMHOUSSEN

Kamil
Gouin D1W
Hugo

TP 01 : Exercice 5
soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y = 0\}$

Exercice 5

Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y = 0\}$

1) Ma F est un sous- $\mathbb{R}$ -en de $\mathbb{R}^3$

SEU1 $F \subset \mathbb{R}^3$ ✓

SEU2 Avec $x = y = z = 0$:

$$0 - 2 \times 0 = 0$$

Donc $\underline{0_{\mathbb{R}^3}} \in F$ ✓

SEU3 Soient $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1) \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$\vec{v} = (x_2, y_2, z_2) \in F$

$$\text{Alors } \lambda \vec{u} + \vec{v} = (\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2, \lambda z_1 + z_2)$$

$$\text{Or, } \lambda x_1 + x_2 - 2(\lambda y_1 + y_2) = \lambda(x_1 - 2y_1) + (x_2 - 2y_2) = 0 \quad \checkmark$$

Donc $\lambda \vec{u} + \vec{v} \in F$ ✓

Ainsi F est un sous- $\mathbb{R}$ -en de $\mathbb{R}^3$

- Soit $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y + 2z = 0\}$

Ma G est un sous- $\mathbb{R}$ -en de $\mathbb{R}^3$

SEU1 $G \subset \mathbb{R}^3$

SEU2 Le 3-uplet $(0, 0, 0)$ vérifie bien :

$$0 + 2 \times 0 = 0, \text{ donc } \underline{0_{\mathbb{R}^3}} \in G \quad \checkmark$$

SEU3 Soient $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1) \in G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$\vec{v} = (x_2, y_2, z_2) \in G$

Or :

$$\lambda \vec{u} + \vec{v} = (\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2, \lambda z_1 + z_2)$$

$$\text{Or, } \lambda y_1 + y_2 + 2(\lambda z_1 + z_2) = \lambda(y_1 + 2z_1) + (y_2 + 2z_2) = 0 \quad \checkmark$$

Donc $\lambda \vec{u} + \vec{v} \in G$, ainsi G est un sous- $\mathbb{R}$ -en de $\mathbb{R}^3$ ✓

2) Soit $\vec{u} \in F \cap G$, alors les coordonnées de u vérifient :

$$\vec{u} \in F \cap G \iff \begin{cases} x - 2z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2z \\ y = -2z \end{cases}$$

$F \cap G =$

Donc $\vec{u} = \{ (-2z, -2z, z) ; z \in \mathbb{R} \}$

Donc l'intersection de F et G est une droite, ainsi elle est différente de $\{0\}$.

F et G ne sont donc pas en somme directe.

Exercice 15

1) Soit $y \in \text{Im}(f+g)$, $\exists x \in E / (f+g)(x) = y$

ie $\underline{f(x) + g(x) = y}$ par linéarité de f et de g
 $\text{Im}(f) \subset \text{Im}(g)$

Donc $y \in \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$

Ainsi, $\boxed{\text{Im}(f+g) \subset \text{Im}(f) + \text{Im}(g)}$

2) Soit $y \in \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$

$\exists (x_1, x_2) \in E^2 / y = f(x_1) + g(x_2)$

Comme $\text{Ker}(f) + \text{Ker}(g) = E$, tout vecteur de E peut se décomposer comme la somme d'un vecteur de $\text{Ker}(f)$ et d'un vecteur de $\text{Ker}(g)$.

On, $x_1 - x_2 \in E$ (car E est un espace vectoriel)

Donc $\exists (u, v) \in \text{Ker}(f) \times \text{Ker}(g) / x_1 - x_2 = u + v$

ie $x_1 - u = x_2 + v = a$

on a alors : $f(x_1 - u) = f(x_1) - f(u) = f(x_1)$ car $u \in \text{Ker}(f)$
 ? par linéarité

de g : $g(x_2 + v) = g(x_2)$

alors : $y = f(x_1) + g(x_2)$

$= f(a) + g(a)$

$= \underline{(f+g)(a)}$

Donc $\text{Im}(f) + \text{Im}(g) \subset \text{Im}(f+g)$

Donc on a l'égalité : $\boxed{\text{Im}(f+g) = \text{Im}(f) + \text{Im}(g)}$