

TD 21: Espaces vectoriels et applications linéaires.

Exercice 5.

1) $H_q \quad F = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y = 0 \}$ est un sous- $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

(Sev 1) $F \subset \mathbb{R}^3$ ✓

(Sev 2) En choisissant $(0, 0, 0)$ on a $0 - 2 \times 0 = 0$ donc $0 \in F$. ✓

(Sev 3) Soient $(u, u') \in F^2$ tel que $u = (x, y, z)$ et $u' = (x', y', z')$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ $H_q \quad \lambda u + u' \in F$.

$$\begin{aligned} \text{On a } & (\lambda x + x') - 2(\lambda y + y') && \text{comme } u \in F \quad x - 2y = 0 \\ & = \lambda(x - 2y) + x' - 2y' && u' \in F \quad x' - 2y' = 0 \\ & = \lambda \times 0 + 0 && \end{aligned}$$

$= 0$ ✓ ~~$\in F$~~ ✓ donc $\lambda(x, y, z) + (x', y', z') \in F$.
donc F est un sous- $\mathbb{R}$ -ev de $\mathbb{R}^3$.

$H_q \quad G = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y + 2z = 0 \}$

(Sev 1) $G \subset \mathbb{R}^3$ ✓

(Sev 2) En choisissant $(0, 0, 0)$ on a $0 + 2 \times 0 = 0 \in G$. ✓

(Sev 3) Soient $(v, v') \in G^2$ tel que $v = (x, y, z)$ et $v' = (x', y', z')$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $H_q \quad \lambda v + v' \in G$.

$$\begin{aligned} \text{On a } & (\lambda y + y') + 2(\lambda z + z') && \text{comme } v \in G \quad y + 2z = 0 \\ & = \lambda(y + 2z) + y' + 2z' && v' \in G \quad y' + 2z' = 0 \\ & = \lambda \times 0 + 0 && \end{aligned}$$

$= 0$ ✓ ~~$\in G$~~ ✓ donc $\lambda v + v' \in G$.
donc G est un sous- $\mathbb{R}$ -ev de $\mathbb{R}^3$.

2) Pour montrer que F et G sont en somme directe ($E = F \oplus G$)

On doit montrer $E = F + G$ et $F \cap G = \{0\}$.

On résout le système
$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4z = 0 \\ y = -2z \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x_F + x_G &= x \\ y_F + y_G &= y \end{aligned}$$

$$\vec{u} = -2(-4, -2, 1) = \text{vect}(\vec{u})$$

On a $S = \{(-4z; -2z; z), z \in \mathbb{R}\}$ ✓

C'est l'équation d'une droite donc F et G ne sont pas en somme directe d'ailleurs F et G sont des plans et ne peuvent pas être en somme directe !

→ dans $\mathbb{R}^3$, oui.

Exercice 6.

$P_1 = \text{vect}((2, 3, -1), (1, -1, -2))$ $\Pi_q P_1 = P_2$.
 $P_2 = \text{vect}((3, 7, 0), (5, 0, -7))$

1) $\Pi_q P_2 \subset P_1$

On note $u_1 = (2, 3, -1)$ et $u_2 = (1, -1, -2)$ on cherche $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$a u_1 + b u_2 = (3, 7, 0)$.

$$\begin{cases} 2a + b = 3 \\ 3a - b = 7 \\ -a - 2b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a + b = 3 \\ 3a - b = 7 \\ -3b = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases} \quad \checkmark$$

On cherche $(c, d) \in \mathbb{R}^2$ tel que $c u_1 + d u_2 = (5, 0, -7)$.

$$\begin{cases} 2c + d = 5 \\ 3c - d = 0 \\ -c - 2d = -7 \end{cases} \iff \begin{cases} 2c + d = 5 \\ 3c - d = 0 \\ -3d = -9 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 1 \\ d = 3 \end{cases}$$

En vérifiant on a bien

$$\begin{aligned} 2 \times 2 + (-1) \times 1 &= 3 & 1 \times (2) + 3 \times (1) &= 5 \\ 2 \times 3 + (-1) \times (-1) &= 7 & 1 \times (3) + 3 \times (-1) &= 0 \\ 2 \times (-1) + (-1) \times (-2) &= 0 & 1 \times (-1) + 3 \times (-2) &= -7 \end{aligned}$$

2) $\Pi_q P_2 \supset P_1$

On note $v_1 = (3, 7, 0)$ et $v_2 = (5, 0, -7)$ on cherche $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ / $x v_1 + y v_2 = (2, 3, -1)$

$$\begin{cases} 3x + 5y = 2 \\ 7x = 3 \\ -7y = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3/7 \\ y = 1/7 \end{cases}$$

On a bien $\frac{3}{7} \times 3 + \frac{1}{7} \times 5 = \frac{14}{7} = 2$
 $\frac{3}{7} \times 7 + \frac{1}{7} \times 0 = 3$
 $\frac{1}{7} \times 7 + \frac{1}{7} \times (-7) = -1$

On cherche $(p, z) \in \mathbb{R}^2$ tel que $p u_1 + z u_2 = (1, -1, -2)$.

$$\begin{cases} 2p + z = 1 \\ 3p - z = -1 \\ -p - 2z = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2p + z = 1 \\ 3p - z = -1 \\ 3p = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} p = -1/3 \\ z = 2/3 \end{cases}$$

On a bien $-\frac{1}{3} \times (2) + \frac{2}{3} \times 5 = 1$
 $-\frac{1}{3} \times 3 + \frac{2}{3} \times 0 = -1$
 $-\frac{1}{3} \times 0 + \frac{2}{3} \times (-7) = -2$

donc $P_1 = P_2$ ✓

Exercice 8

1) On définit $\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$ est un sous- $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$.

(Sev 1) $\Gamma \subset M_3(\mathbb{R})$ ✓

(Sev 2) En choisissant $(0, 0, 0)$ on a $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice nulle donc $0_3 \in \Gamma$ ✓

(Sev 3) Soient $(A, B) \in \Gamma^2$ tel que $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ c' & a' & b' \\ b' & c' & a' \end{pmatrix}$

et $\lambda \in \mathbb{R}$ montrons que $\lambda A + B \in \Gamma$

$$\text{on a } \lambda A + B = \begin{pmatrix} \lambda a + a' & \lambda b + b' & \lambda c + c' \\ \lambda c + c' & \lambda a + a' & \lambda b + b' \\ \lambda b + b' & \lambda c + c' & \lambda a + a' \end{pmatrix}$$

Comme $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $(a', b', c') \in \mathbb{R}^3$ on a $\lambda a + a' \in \mathbb{R}$
 $\lambda b + b' \in \mathbb{R}$
 $\lambda c + c' \in \mathbb{R}$

donc $\lambda A + B \in \Gamma$. donc Γ est un sous- $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ ✓

Exercice 14

1) On définit $g \circ f$ est un projecteur.

→ Il faut que $g \circ f \in \mathcal{L}(E)$ et $(g \circ f) \circ (g \circ f) = g \circ f$.

$$\text{On a } g \circ \underbrace{f \circ g}_{id_E} = g \circ id_E \circ f = g \circ f \circ id_E = g \circ f. \quad \checkmark$$

et comme $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ on a $g \circ f \in \mathcal{L}(E)$.
donc $g \circ f$ est un projecteur. ✓

2) On définit $\ker(f) = \ker(g \circ f)$.

$$\boxed{\subset} \text{ Si } f(x) = 0_E \text{ alors } g(f(x)) = g(0_E) = 0_E \text{ donc } g \circ f(0_E) = 0_E \quad \checkmark$$

$$\boxed{\supset} \text{ Si } g(f(x)) = 0_E$$

$$\text{alors } \underbrace{f(g(f(x)))}_{id_E} = 0_E \text{ ie } f(\vec{x}) = 0 \quad \checkmark$$