

CLAIN

Thiquet

Exercice 16 :

FABIEN

SARIGNAN

Maxime.

1.

Soient E un K -ev et $f \in \mathcal{L}(E)$ Soit $\vec{x} \in \text{Ker}(f)$,alors $f(\vec{x}) = \vec{0}_E$ et $f \circ f(\vec{x}) = f(\vec{0}_E) = \vec{0}_E$ ✓Donc $f^2(\vec{x}) = \vec{0}_E$ ✓alors $\vec{x} \in \text{Ker}(f^2)$, i.e $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$ ✓Soit $\vec{y} \in \text{Im}(f^2)$, $\exists \vec{x} \in E$ / $\vec{y} = f^2(\vec{x})$ $\vec{y} = f(\underbrace{f(\vec{x})}_{\in E})$ donc $\vec{y} \in \text{Im}(f)$ ✓Ainsi $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$ ✓2. Hq $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{\vec{0}_E\} \Leftrightarrow \text{Ker}(f^2) = \text{Ker}(f)$ $\Rightarrow$ on suppose $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{\vec{0}_E\}$,on sait que $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$ Hq $\text{Ker}(f^2) \subset \text{Ker}(f)$ Soit $\vec{x} \in \text{Ker}(f^2)$, $f^2(\vec{x}) = \vec{0}_E$ d'où $f(f(\vec{x})) = \vec{0}_E$ donc $f(\vec{x}) \in \text{Ker}(f)$ or $f(\vec{x}) \in \text{Im}(f)$ par définition ✓Ainsi $f(\vec{x}) \in \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{\vec{0}_E\}$ ✓Donc $f(\vec{x}) = \vec{0}_E$ ✓On a bien $\vec{x} \in \text{Ker}(f)$ ✓Finalement, $\text{Ker}(f^2) \subset \text{Ker}(f)$ ✓Ainsi $\text{Ker}(f^2) = \text{Ker}(f)$ ✓ $\Leftarrow$ Supposons $\text{Ker}(f^2) = \text{Ker}(f)$ Hq $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{\vec{0}_E\}$ Soit $\vec{x} \in \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$

$\exists \vec{v} \in E \mid \vec{x} = f(\vec{v})$ ✓
 Donc $f^2(\vec{v}) = f(f(\vec{v})) = f(\vec{x}) = \vec{0}_E$ ✓
 Ainsi $\vec{v} \in \text{Ker}(f^2) = \text{Ker}(f)$, donc $\vec{x} = \vec{0}_E$ ✓
 ce que prouve bien le résultat ✓

3. $\Rightarrow$ Supposons que $E = \text{Ker}(f) + \text{Im}(f)$

Hq $\text{Im}(f) \subset \text{Im}(f^2)$

Soit $\vec{y} \in \text{Im}(f)$, $\exists \vec{x} \in E \mid \vec{y} = f(\vec{x})$ ✓

On $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$ avec $\vec{u} \in \text{Ker}(f)$ et $\vec{v} \in \text{Im}(f)$

donc $\exists \vec{w} \in E \mid \vec{v} = f(\vec{w})$

ainsi $f(\vec{x}) = f(\vec{u} + \vec{v})$

d'où $\vec{y} = f(\vec{u}) + f(\vec{v}) = \vec{0}_E + f(\vec{v}) = f(\vec{v})$ ✓

donc $\vec{y} = f(\vec{v}) = f(f(\vec{w})) = f^2(\vec{w})$ ✓

ainsi $\vec{y} \in \text{Im}(f^2)$, donc $\text{Im}(f) \subset \text{Im}(f^2)$ ✓

$\Leftarrow$ Supposons que $\text{Im}(f^2) = \text{Im}(f)$

On veut montrer que pour un x appartenant à E ,
on a $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} \in \text{Ker}(f)$, $\vec{v} \in \text{Im}(f)$.

On a $f(x) \in \text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$, ainsi, $\exists c \in E \mid$
 $f(x) = f^2(c)$ ✓

Intuition, on pose $v = f(c)$, alors, on aura
 $u = x - f(c)$.

On vérifie que ce couple de solutions fonctionne bien.

- On a bien $f(c) \in \text{Im}(f)$

- $f(u) = f(x - f(c)) = f(x) - f^2(c) = \vec{0}_E$ ✓

Car $f(x) = f^2(c)$, donc $x - f(c) \in \text{Ker}(f)$

- $u + v = x - f(c) + f(c) = x$ ✓

Exercice 7:

On a $\Delta = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ est un sous $\mathbb{R}$ -ev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- On a bien $\Delta \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
- $O_2 \in \Delta$ car $(a,b) \in \mathbb{R}$. en prenant $a=b=0$
on obtient $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- Soit $(A,B) \in \Delta^2$, et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a:
 $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \lambda A + B &= \lambda \cdot \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda a & -\lambda b \\ \lambda b & \lambda a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda a + b & -(\lambda b + d) \\ \lambda b + d & \lambda a + c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{et on a bien } \lambda A + B = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{avec } \alpha &= \lambda a + b \in \mathbb{R} \\ \beta &= \lambda b + d \in \mathbb{R} \end{aligned}$$