Julie
Sarah

TD21 : Espaces vectoriels et applications linéaires

Exercice 14 :

Soient $(f,g) \in \mathcal{L}(E)^2$, on suppose $f \circ g = id_E$

1) Mq $g \circ f$ est un projecteur. On a déjà $g \circ f \in \mathcal{L}(E)$.

ie mq $(g \circ f) \circ (g \circ f) = g \circ f$

$\cdot (g \circ f) \circ (g \circ f) = g \circ f \circ g \circ f$
$= g \circ (f \circ g) \circ f$
$= g \circ id_E \circ f$
$= g \circ f$ donc $g \circ f$ est un projecteur.

2). Mq $\ker(f) = \ker(g \circ f)$

$\subset$ Soit $\vec{x} \in \ker(f)$, donc $f(\vec{x}) = \vec{0}$

Alors $(g \circ f)(\vec{x}) = g(f(\vec{x})) = g(\vec{0}) = \vec{0}$ car $g \in \mathcal{L}(E)$

donc $\vec{x} \in \ker(g \circ f)$

donc $\ker(f) \subset \ker(g \circ f)$

$\supset$ Soit $\vec{x} \in \ker(g \circ f)$, donc $g(f(\vec{x})) = \vec{0}$) on applique f

$f(g(f(\vec{x}))) = f(\vec{0})$

$f \circ g \circ f(\vec{x}) = \vec{0}$ car $f \in \mathcal{L}(E)$

$id_E \circ f(\vec{x}) = \vec{0}$

$f(\vec{x}) = \vec{0}$

donc $\vec{x} \in \ker(f)$

Donc $\ker(g \circ f) \subset \ker(f)$

Donc $\underline{\ker(f) = \ker(g \circ f)}$

. Mq $Im(g) = Im(g \circ f)$

$\subset$ Soit $\vec{y} \in Im(g)$, alors $\exists \vec{x} \in E / g(\vec{x}) = \vec{y}$

donc $\vec{y} = g(f \circ g(\vec{x}))$

On pose $\vec{z} = g(\vec{x})$

alors $\vec{y} = g \circ f(\vec{z})$

donc $\vec{y} \in Im(g \circ f)$

Donc $Im(g) \subset Im(g \circ f)$

$\supset$ Soit $\vec{y} \in Im(g \circ f)$, alors $\vec{y} = g \circ f(\vec{y})$ car $g \circ f$ est un projecteur

On pose $\vec{x} = f(\vec{y})$ donc $g(\vec{x}) = \vec{y}$

ie $\vec{y} \in Im(g)$

donc $Im(g \circ f) \subset Im(g)$

Donc $\underline{Im(g) = Im(g \circ f)}$

Exercice 6 :

Soit $P_1 = vect((2,3,-1);(1,-1,-2))$ et $P_2 = vect((3,7,0);(5,0;-7))$

Mq $P_1 = P_2$

. $\subset$ Mq $(2,3,-1) \in P_2$ et $(1,-1,-2) \in P_2$

. $(2,3,-1) = a(3,7,0) + b(5,0,7)$

$$\begin{cases} 3a + 5b = 2 \\ 7a = 3 \\ -7b = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} 3 \times \frac{3}{7} + \frac{5}{7} = 2 \\ a = \frac{3}{7} \\ b = \frac{1}{7} \end{cases}$$

donc $(2,3,-1) = \frac{3}{7}(3,7,0) + \frac{1}{7}(5,0,-7)$
ie : $(2,3,-1) \in P_2$

. $(1,-1,-2) = a(3,7,0) + b(5,0,-7)$

$$\begin{cases} 3a + 5b = 1 \\ 7a = -1 \\ -7b = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} -\frac{3}{7} + \frac{10}{7} = 1 \\ a = -\frac{1}{7} \\ b = \frac{2}{7} \end{cases}$$

donc $(1,-1,-2) = -\frac{1}{7}(3,7,0) + \frac{2}{7}(5,0,-7)$
ie : $(1,-1,-2) \in P_2$

donc $P_1 \subset P_2$

$\supset$. Mq $(3,7,0) \in P_1$ et $(5,0,-7) \in P_1$

. $(3,7,0) = a(2,3,-1) + b(1,-1,-2)$

$$\begin{cases} 2a+b=3 \\ 3a-b=7 \\ -a-2b=0 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2+L_1}{\iff} \begin{cases} 2a+b=3 \\ 5a=10 \\ -a=2b \end{cases} \iff \begin{cases} 4-1=3 \\ a=2 \\ b=-1 \end{cases}$$

donc $(3,7,0) = 2(2,3,-1) - 1(1,-1,-2)$
ie : $(3,7,0) \in P_1$

. $(5,0,7) = a(2,3,-1) + b(1,-1,-2)$

$$\begin{cases} 2a+b=5 \\ 3a-b=0 \\ -a-2b=-7 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2+L_1}{\iff} \begin{cases} 2a+b=5 \\ 5a=5 \\ 2b=-a+7 \end{cases} \iff \begin{cases} 2+3=5 \\ a=1 \\ b=3 \end{cases}$$

donc $(5,0,-7) = (2,3,-1) + 3(1,-1,-2)$
ie : $(5,0,-7) \in P_1$

donc $P_2 \subset P_1$

Conclusion : $\underline{P_1 = P_2}$