

Exo 12:

Th. $(\text{Im}(p) \text{ et } \text{Ker}(p) \text{ stables}) \Leftrightarrow (f \circ p \text{ et } p \circ f)$
par f

$\boxed{\Leftarrow}$ Si $f \circ p = p \circ f$:

Soit $\vec{y} \in \text{Im}(p)$, $\exists \vec{x} \in E$ $\vec{y} = p(\vec{x})$

On a: $f(\vec{y}) = f(p(\vec{x}))$

Or $f \circ p = p \circ f$ donc:

$$f(p(\vec{x})) = \underbrace{p(f(\vec{x}))}_{\in \text{Im}(p)} \quad \text{Donc } \underline{f(\vec{x}) \in \text{Im}(p)} \quad \checkmark$$

Soit $\vec{x} \in \text{Ker}(p)$ i.e. $p(\vec{x}) = \vec{0}_E$

Donc:

$$p(f(\vec{x})) = f(p(\vec{x})) \quad \checkmark$$

$$\text{Or, } p(\vec{x}) = \vec{0}_E \quad \checkmark$$

Donc:

$$f(p(\vec{x})) = f(\vec{0}_E)$$

$$\text{Par linéarité, } f(\vec{0}_E) = \vec{0}_E \quad \checkmark$$

Ainsi:

$$p(f(\vec{x})) = \vec{0}_E \quad \checkmark \quad \text{Donc } \underline{f(\vec{x}) \in \text{Ker}(p)} \quad \checkmark$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Si $\text{Im}(p)$ et $\text{Ker}(p)$ stables par f

Soit $\vec{x} \in E$

$$\text{On a: } \vec{x} = \underbrace{\vec{x}_1}_{\in \text{Im}(p)} + \underbrace{\vec{x}_2}_{\in \text{Ker}(p)} \quad \checkmark$$

On applique f : (f est linéaire)

$$f(\vec{x}) = \underbrace{f(\vec{x}_1)}_{\substack{\in \text{Im}(p) \\ \text{car stable}}} + \underbrace{f(\vec{x}_2)}_{\in \text{Ker}(p)}$$

On applique le projecteur:

$$p(f(\vec{x})) = \underbrace{p(f(\vec{x}_1))}_{= f(\vec{x}_1)} + \underbrace{p(f(\vec{x}_2))}_{= \vec{0}_E} \quad \checkmark$$

À venir :

$$p(f(\vec{x})) = f(p(\vec{x})) \quad \checkmark$$

Maintenant cherchons $f(p(\vec{x}))$:

On a :

$$\begin{aligned} f(p(\vec{x})) &= f(p(\vec{x}_1 + \vec{x}_2)) \\ &= f(p(\vec{x}_1) + p(\vec{x}_2)) \text{ car } p \text{ linéaire} \end{aligned}$$

On a $\vec{x}_1 \in \text{Im}(p)$ et $\vec{x}_2 \in \text{Ker}(p)$

Donc :

$$p(\vec{x}_1) = \vec{x}_1 \text{ et } p(\vec{x}_2) = \vec{0}_E$$

À venir :

$$f(p(\vec{x})) = f(\vec{x}_1) \quad \checkmark \text{ i.e. } f(p(\vec{x})) = p(f(\vec{x}))$$

$$\boxed{\text{Donc } p \circ f = f \circ p \quad \checkmark}$$