

TD21) Maths.

Ex 8) 1^{ère} Méthode:

Eq. $\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$ est un sous-R-er de $M_3(\mathbb{R})$.

PEDRE Olivier

LEBRETON Ruben

RANDRIANASOLO George

Ser 1): $\Gamma \subset M_3(\mathbb{R})$ ✓

Notation inventée.

Ser 2): De plus, $\Gamma(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3$ ✓

Donc $O_3 \in \Gamma$. ✓

Ser 3): Soit $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix}$

avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$

avec $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on a: $\lambda A + B = \lambda \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \lambda\alpha & \lambda\beta & \lambda\gamma \\ \lambda\gamma & \lambda\alpha & \lambda\beta \\ \lambda\beta & \lambda\gamma & \lambda\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda\alpha + x & \lambda\beta + y & \lambda\gamma + z \\ \lambda\gamma + z & \lambda\alpha + x & \lambda\beta + y \\ \lambda\beta + y & \lambda\gamma + z & \lambda\alpha + x \end{pmatrix}$$

On pose: $a' := \lambda\alpha + x$; $b' := \lambda\beta + y$; $c' := \lambda\gamma + z$

On a bien $(a', b', c') \in \mathbb{R}^3$ car $\mathbb{R}$ est un anneau.

et $\lambda A + B = \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ c' & a' & b' \\ b' & c' & a' \end{pmatrix}$ ✓

Donc $(\lambda A + B) \in \Gamma$ i.e. Γ est stable par combinaison linéaire. ✓

Conclusion: Γ est bien un sous-R-er de $M_3(\mathbb{R})$. ✓

2^{ème} Méthode: On a $\Gamma = \text{vect}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ ✓

Donc Γ est un sous-R-er de $M_3(\mathbb{R})$. ✓