

Rinat
Gabriel
Maxime
Eichen
MPSI

Exercice 6:

$$P_1 = \text{vect}((2, 3, -1); (1, -1, -2)) \text{ et } P_2 = \text{vect}((3, 7, 0); (5, 0, -7))$$

Montrons que $P_1 = P_2$ en montrant que $P_1 \subset P_2$ et $P_2 \subset P_1$.

On va chercher à exprimer chacun des vecteurs de P_2 comme combinaisons linéaires des deux vecteurs de P_1 :

$$* (3, 7, 0) = \lambda \cdot (2, 3, -1) + \mu \cdot (1, -1, -2)$$

Appliquez la $\Leftrightarrow$ méthode de pivot de Gauss

$$\begin{cases} 3 = 2\lambda + \mu \\ 7 = 3\lambda - \mu \\ 0 = -\lambda - 2\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = -4\mu + \mu \\ 7 = -6\mu - \mu \\ \lambda = -2\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = -3\mu \\ 7 = -7\mu \\ \lambda = -2\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = -1 \\ \mu = -1 \\ \lambda = 2 \end{cases}$$

Redondant!

$$\text{Donc } (3, 7, 0) = 2 \cdot (2, 3, -1) + (-1) \cdot (1, -1, -2)$$

$$* (5, 0, -7) = \lambda' \cdot (2, 3, -1) + \mu' \cdot (1, -1, -2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5 = 2\lambda' + \mu' \\ 0 = 3\lambda' - \mu' \\ -7 = -\lambda' - 2\mu' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 = 2\lambda' + 3\lambda' \\ \mu' = 3\lambda' \\ -7 = -\lambda' - 6\lambda' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 = 5\lambda' \\ \mu' = 3\lambda' \\ -7 = -7\lambda' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda' = 1 \\ \mu' = 3 \\ \lambda' = 1 \end{cases}$$

$$\text{Donc } (5, 0, -7) = 1 \cdot (2, 3, -1) + 3 \cdot (1, -1, -2)$$

On a montré que $(3, 7, 0)$ et $(5, 0, -7)$ peuvent s'écrire comme combinaisons linéaires des vecteurs de P_1 . Donc $(3, 7, 0)$ et $(5, 0, -7)$ sont des vecteurs "non-essentiels" si on les rajoute dans P_1 et donc on aura:

$$P_1 = \text{vect}((2, 3, -1); (1, -1, -2); (3, 7, 0); (5, 0, -7))$$

Ce qui prouve que $P_2 \subset P_1$

Maintenant on va chercher à exprimer chacun des vecteurs de P_1 comme combinaisons linéaires des deux vecteurs de P_2 :

$$* (2, 3, -1) = \alpha \cdot (3, 7, 0) + \beta \cdot (5, 0, -7)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 3\alpha + 5\beta \\ 3 = 7\alpha \\ -1 = -7\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 3\alpha + 5\beta \\ \alpha = \frac{3}{7} \checkmark \\ \beta = \frac{1}{7} \checkmark \end{cases}$$

$$\text{Et } 3\alpha + 5\beta = 3 \times \frac{3}{7} + 5 \times \frac{1}{7} = 2 \quad \checkmark$$

$$\text{Donc } (2, 3, -1) = \frac{3}{7} (3, 7, 0) + \frac{1}{7} (5, 0, -7) \quad \checkmark$$

$$* (1, -1, -2) = \alpha' \cdot (3, 7, 0) + \beta' \cdot (5, 0, -7)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 3\alpha' + 5\beta' \\ -1 = 7\alpha' \\ -2 = -7\beta' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = 3\alpha' + 5\beta' \\ \alpha' = \frac{-1}{7} \\ \beta' = \frac{2}{7} \end{cases}$$

$$\text{Et } 3\alpha' + 5\beta' = 3 \times \frac{-1}{7} + 5 \times \frac{2}{7} = 1$$

$$\text{Donc } (1, -1, -2) = \frac{-1}{7} (3, 7, 0) + \frac{2}{7} (5, 0, -7) \quad \checkmark$$

On a montré que $(2, 3, -1)$ et $(1, -1, -2)$ peuvent s'écrire comme combinaisons linéaires des vecteurs de P_2 . Si on ajoute $(2, 3, -1)$ et $(1, -1, -2)$ dans P_2 alors ce sont des vecteurs "non-essentiels" et on aura :

$$P_2 = \text{vect}((3, 7, 0); (5, 0, -7); (2, 3, -1); (1, -1, -2))$$

Ce qui prouve $P_1 \subset P_2$ $\checkmark$

On a $P_1 \subset P_2$ et $P_2 \subset P_1$ donc $P_1 = P_2$ $\square \quad \checkmark$