

ZITTE

THIAW

Nelson

Charles

TD 21 - Ex 2

Ex 2: Parmi les sous-ensembles de $\mathbb{R}^N$ suivants, lesquels sont des sous- $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels de $\mathbb{R}^N$?

1. les ensembles A_1 et A_2 des suites respectivement constantes et monotones

sev 1) A_1 et A_2 sont des suites donc A_1 et A_2 sont deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^N$ ✓

sev 2) La suite constante $\tilde{0}$ est bien croissante et monotone donc $\tilde{0} \in A_1$ et $\tilde{0} \in A_2$ donc A_1 et $A_2 \neq \emptyset$

sev 3) Soit $(u, v) \in A_1^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ mg $\lambda \cdot u + v \in A_2$

Donc λu est monotone donc $\lambda u + v$ est aussi monotone

Or la somme de deux suites monotones n'est pas toujours monotone

Ainsi $\lambda u + v \notin A_2$

(contre exemple, $\therefore 2n - n^2$)

$\therefore 2n$ est monotone
 n^2 aussi
 $n \in \mathbb{N}$

Mais $2n - n^2 = n(2 - n)$ qui n'est pas monotone

(car elle est d'abord croissante puis décroissante)

Or ?

$$w_0 = 0$$

$$w_1 = 1$$

$$w_2 = 0$$

Soit $(u, v) \in A_1^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$\lambda u + v \notin A_2$ dès qu'on prend $\lambda < 0$ on a la somme d'une suite décroissante et d'une suite croissante n'est pas toujours croissante.

Donc A_1 et A_2 ne sont pas des sous- $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels de $\mathbb{R}^N$.

2. L'ensemble B des suites bornées.

sev 1) B est l'ensemble des suites bornées donc $B \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ /

sev 2) $B \neq \emptyset$ car la suite constante $\tilde{0}$ est bornée /
 $\downarrow$
 $0 \leq 0 \leq 0$

On pourrait préciser q-elles vont être les bornes par exemple.

sev 3) Soit $(u, v) \in B$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors
 Au $\forall u \in B$ comme c'est la somme de deux suites bornées.

Donc B est un sous- $\mathbb{R}$ -espace vectoriel

3. L'ensemble C des suites périodiques.

sev 1) $C \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ /

sev 2) $C \neq \emptyset$ (comme $\tilde{0}$ est 1-périodique) /

sev 3) Soit $(u, v) \in C$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ Noy $\lambda u + v \in C$
 Comme on a des suites périodiques, il faut savoir que la somme de suites périodiques reste périodique car on manipule des entiers, i.e. que deux entiers ont toujours un ppier donc $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

$\lambda u + v \in \mathbb{R}$
 Manque d'explications, il faut préciser que u et v sont toutes les 2 périodiques avec une période commune.

4. L'ensemble D des suites qui convergent vers 1.

sev 1) ~~$D \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$~~ car l'élément neutre $\tilde{0}$ ne converge pas vers 1

5. L'ensemble E des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$$

sev1 / On a bien $E \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

sev2 / $E \neq \emptyset$ car $(0 = 0 + 0) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

sev3 / Soit $(u, v) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\lambda u + v \in E$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \lambda u_{n+2} + v_{n+2} = \lambda(u_{n+2} + u_n) + (v_{n+2} + v_n) \in E$$

$$= (\lambda u_{n+1} + v_{n+1}) + (\lambda u_n + v_n)$$

Donc $\lambda u + v \in E$

Posons la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$: $w_n = \lambda u_n + v_n$
Donc $w_{n+2} = \lambda u_{n+2} + v_{n+2}$

Or, on a :

$$\begin{aligned} \lambda u_{n+2} + v_{n+2} &= \lambda(u_{n+1} + u_n) + v_{n+1} + v_n \\ &= \underbrace{\lambda u_{n+1} + v_{n+1}}_{= w_{n+1}} + \underbrace{\lambda u_n + v_n}_{= w_n} \\ &= w_{n+1} + w_n \end{aligned}$$

Donc $w_{n+2} = w_{n+1} + w_n$

Donc $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$