

Exercice 13 :

1. Soient $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ / $f \circ g = 0_{\mathcal{L}(E)}$

On a $\text{Im}(g) = \{g(\vec{x}), \vec{x} \in E\}$

et $\text{Ker}(f) = \{\vec{x} \in E, f(\vec{x}) = 0_{\vec{E}}\}$

Soit $\vec{y} \in \text{Im}(g)$, alors $\exists \vec{x} \in E$ / $g(\vec{x}) = \vec{y}$ ✓

On applique f : $f(g(\vec{x})) = f(\vec{y})$

Ainsi $0_{\vec{E}} = f(\vec{y})$ ✓

On a donc $\vec{y} \in \text{Ker}(f)$ ✓

Finalement, $\text{Im}(g) \subset \text{Ker}(f)$ ✓

2. Si on a $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$, alors on a $\boxed{\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)}$

d'après la question 1.

On compose $\text{id}_E - f$ avec $\text{id}_E + f$:

$$\begin{aligned} (\text{id}_E - f) \circ (\text{id}_E + f) &= \text{id}_E \circ (\text{id}_E + f) - f \circ (\text{id}_E + f) \\ &= \text{id}_E + f - f - f^2 \end{aligned}$$

$$\underline{(\text{id}_E - f) \circ (\text{id}_E + f) = \text{id}_E} \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} \text{Et, on a } (\text{id}_E + f) \circ (\text{id}_E - f) &= \text{id}_E \circ (\text{id}_E - f) + f \circ (\text{id}_E - f) \\ &= \text{id}_E - f + f - f^2 \\ &= \underline{\text{id}_E} \end{aligned}$$

On a bien un inverse de la fonction $\text{id}_E - f$.

Ainsi $\boxed{\text{id}_E - f \in \text{GL}(E)}$ ✓.

Exercice 14:

1) Soient f et g 2 fonctions de $\mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ g = \text{id}_E$
 $g \circ f \in \mathcal{L}(E)$

$$\text{et } (g \circ f) \circ (g \circ f) = g \circ (f \circ g) \circ f = g \circ f \quad \checkmark$$

donc $g \circ f$ est un projecteur $\checkmark$

2) - Mq $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(g \circ f)$

on le prouve par double inclusion

$\square$:

soit $\vec{x} \in \text{Ker}(g \circ f)$,

$$g \circ f(\vec{x}) = \vec{0}_E, \text{ donc } f \circ g \circ f(\vec{x}) = \vec{0}_E \quad \checkmark$$

car f est linéaire

$$\text{donc } f(\vec{x}) = \vec{0}_E \quad \text{car } f \circ g = \text{id}_E$$

$$\text{ainsi } \vec{x} \in \text{Ker}(f) \quad \checkmark$$

$\square$

soit $\vec{x} \in \text{Ker}(f)$

$$f(\vec{x}) = \vec{0}_E, \text{ donc } g \circ f(\vec{x}) = \vec{0}_E$$

$$\text{ainsi } \vec{x} \in \text{Ker}(g \circ f) \quad \checkmark$$

- Mq $\text{Im}(g) = \text{Im}(g \circ f)$

on le prouve par double inclusion

$$\square \text{ soit } \vec{y} \in \text{Im}(g \circ f), \exists \vec{x} \in E /$$

$$\vec{y} = g \circ f(\vec{x})$$

$$\vec{y} = g(f(\vec{x})) =$$

$$\text{ainsi } \vec{y} \in \text{Im}(g) \quad \checkmark$$

$$\square \text{ soit } \vec{y} \in \text{Im}(g)$$

$$\exists \vec{x} \in E / \vec{y} = g(\vec{x})$$

on applique f :

$$f \circ g(\vec{x}) = f(\vec{y})$$

$$\vec{x} = f(\vec{y}) \quad /$$

on applique g :

$$g(\vec{x}) = \vec{y} = g \circ f(\vec{y}) \quad /$$

$$\text{ainsi } \vec{y} \in \text{Im}(g \circ f) \quad /$$

Exercice 16:

Soient E un $\mathbb{K}$ -ev et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1.

$$M_1 \quad \text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$$

$$\text{Soit } \vec{x} \in \text{Ker}(f) \text{, alors } f(\vec{x}) = \vec{0}_E$$

$$\text{Ainsi } f(f(\vec{x})) = \vec{0}_E \quad \text{car } f \text{ est linéaire}$$

$$\text{donc } \vec{x} \in \text{Ker}(f^2) \quad /$$

$$M_2 \quad \text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$$

$$\text{Soit } \vec{x} \in \text{Im}(f^2) \text{ alors } \exists \vec{y} / \vec{x} = f \circ f(\vec{y})$$

$$\vec{x} = f(f(\vec{y}))$$

$$\text{Ainsi } \vec{x} \in \text{Im}(f) \quad /$$

$$2. \quad M_3 \quad \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{\vec{0}_E\} \Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$$

On montre par double implication.

$$\Rightarrow \quad \text{On suppose que } \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{\vec{0}_E\}$$

$$\text{D'après b 1), on a } \text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$$

$$\text{Soit } \vec{x} \in \text{Ker}(f^2) \text{ . Ainsi } f(f(\vec{x})) = \vec{0}_E$$

$$\text{Ainsi, on a } f(\vec{x}) \in \text{Im}(f) \text{ et } f(\vec{x}) \in \text{Ker}(f) \quad /$$

$$\text{Donc } f(\vec{x}) = \vec{0}_E \quad \text{Donc } \vec{x} \in \text{Ker}(f) \quad \checkmark$$